Lycée Lavoisier **Année 2024-2025**
PC – Informatique

TP : Résolution d'équations et d'équations différentielles

---

1 Résolution d'équations par dichotomie

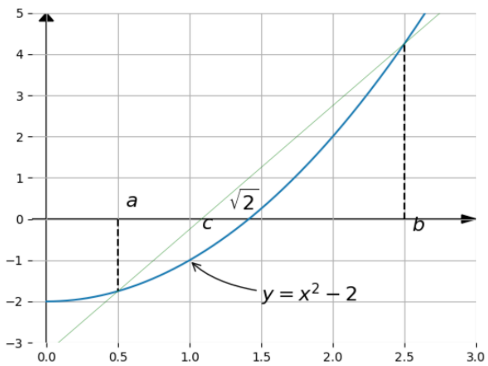
Exercice 1.

1. Implémenter une fonction `dichotomie` prenant en argument une fonction f, les bornes a et b d'un segment $[a, b]$ sur lequel f est définie avec $f(a)f(b) \leqslant 0$, une précision $\varepsilon > 0$ et un nombre `maxiter` d'itérations à ne pas dépasser, et qui renvoie une valeur approchée à ε près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$, ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtenir en utilisant la méthode par dichotomie vue en cours.
2. a) Tester la fonction `dichotomie` avec $f : x \mapsto \cos x - \frac{x}{4}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On pourra charger la bibliothèque `math` de Python afin de pouvoir utiliser la valeur `math.pi`.

   b) Faire un test avec $\varepsilon = 10^{-17}$. Que constatez-vous ? Expliquer le rôle joué par la variable `maxiter`.

Exercice 2. *(Méthode de Lagrange – à ne traiter que quand vous avez fait tout le reste dans la suite)* La méthode de Lagrange, ou méthode de la fausse position (*regula falsi*) suivant une expression du XVII^e siècle, est une variante de la méthode de dichotomie pour résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$.

Plutôt, pour couper l'intervalle $[a, b]$ en deux, de prendre comme point de comparaison $c = \frac{a+b}{2}$, on choisit l'abscisse c du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la corde reliant les points $(a, f(a)$ et $(b, f(b))$.



Si $f(c)$ est du même signe que $f(a)$, on pose $a_1 = c$ et $b_1 = b$, sinon on pose $a_1 = a$ et $b_1 = c$. En itérant le processus, on construit comme dans la méthode par dichotomie des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

1. Calculer, en fonction de a, $f(a)$, b et $f(b)$, l'abscisse c du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

2. En vous inspirant du code de la fonction `dichotomie` implémenter une fonction `lagrange1` prenant un argument une fonction f, les bornes a et b d'un segment $[a, b]$ sur lequel f est définie avec $f(a)f(b) \leqslant 0$, une précision $\varepsilon > 0$ et un nombre `maxiter` d'itérations à ne pas dépasser, et qui renvoie une valeur approchée à ε près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$, ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtenir en utilisant la méthode de Lagrange.
3. Tester la fonction `lagrange1` avec $f : x \mapsto \cos x - \frac{x}{4}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en faisant varier la précision demandée. Que constatez-vous ? Tentez d'expliquer le phénomène.
4. Implémenter une fonction `lagrange2` où l'on modifie la condition d'arrêt en testant $|c_n - c_{n-1}| \leqslant \varepsilon$: on estime que l'on peut s'arrêter dès que deux estimations successives de la racine sont assez proches l'une de l'autre.

   On fera attention à bien traiter les cas où $f(a) = 0$ et où $f(b) = 0$.
5. Comparer le nombre d'itérations entre la méthode par dichotomie et la méthode de Lagrange.

2 Résolution d'équations différentielles

Exercice 3. On considère un moteur à courant continu dont la vitesse angulaire est repérée par la fonction $\omega(t)$ et soumis à un moment moteur permettant son démarrage. L'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$ est :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_{lim}}{\tau}$$

où $\tau = 1$ s est le temps caractéristique de mise en rotation et $\omega_{lim} = 100$ rad/s est la vitesse limite que va atteindre $\omega(t)$.

Obtenir une représentation graphique de $\omega(t)$ en résolvant l'équation différentielle par la méthode d'Euler explicite.

Exercice 4. On considère un système physique en oscillations amorties repéré par la fonction $x(t)$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + 2M\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On prendra $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $M = 0,1$ et $\omega_0 = 1$ rad.s^{-1}.

1. Résoudre cette équation différentielle en utilisant le méthode d'Euler vectorielle. On rappelle que celle-ci implique d'utiliser le schéma :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y, t) \end{cases} \quad \text{soit } \dot{X} = F(X, t) \text{ avec } F((x, y), t) = (y, f(x, y, t)) \text{ et } X = (x, y)$$

2. Représenter graphiquement $x(t)$ ainsi que le portrait de phase, c'est-à-dire la courbe donnant $\dot{x}(t)$ en fonction de $x(t)$.
3. Comparer les résultats à ceux donnés par la méthode `odeint` du module `scipy.integrate` dont le code donnant $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ est donné ci-dessous :

```python
import scipy.integrate as sp
temps = np.linspace(0, 10, 1000)
X = sp.odeint(f, [0, 1], temps)
x, y = X[:, 0], X[:, 1]
```

Dans les paramètres de `odeint`, `f` est la fonction associée au schéma numérique, et `temps` est une liste des valeurs pour la variable temporelle. La variable `x` correspond à $x(t)$ et la variable `y` correspond à $\dot{x}(t)$, ces deux grandeurs sont les composantes du vecteur `X` obtenu grâce à `odeint`.

3 Méthode des différences finies

Exercice 5. On considère dans cet exercice l'évolution de la température en fonction du temps pour un fil conducteur unidimensionnel. La température de ce fil sera une fonction de deux variables $T(x,t)$.

Le fil conducteur électrique est initialement dans son régime stationnaire. Il est brutalement exposé à un refroidissement à 300 K à ses bornes.

On va s'intéresser dans un premier temps à l'équation de la diffusion thermique en une dimension d'espace et sans source (D est appelé le coefficient de diffusion thermique du fil conducteur) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (E_0)$$

On considérera la condition initiale suivante :

$$\forall x,\ T(x,t) = 300 + 100x/L \quad (C_1)$$

et la condition initiale suivante :

$$\forall t > 0,\ T(0,t) = T(L,t) = 300 \quad (C_2)$$

La méthode des différences finie est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (*schéma numérique*) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Ainsi on va chercher à discrétiser notre problème. Nous ferons l'hypothèse qui est celle utilisée pour la méthode d'Euler de résolution d'une équation différentielle, à savoir que la dérivée d'une fonction en z peut-être approchée par l'accroissement de cette fonction entre z et $z + \Delta z$, où Δz désigne notre pas de discrétisation (pour la variable z).

Les valeurs de la température à l'instant initial seront stockées dans une liste $(T_j^0)_{0\leqslant j\leqslant N-1}$ de longueur N. Il y aura donc $N-1$ pas de discrétisation en espace. Les valeurs de la température à l'instant $t = \Delta t$ seront stockées dans une liste $(T_j^1)_{0\leqslant j\leqslant N-1}$, qui aura également comme longueur N. De même, les valeurs de la température à l'instant $t = n\Delta t$ seront stockées dans une liste $(T_j^n)_{0\leqslant j\leqslant N}$.

1. Ecrire une fonction `PasEspace(L,N)` qui renvoie le pas d'espace Δx en fonction de la longueur L sur laquelle on résout le problème et du nombre N de points souhaités.

Le pas de temps Δt ne peut pas être choisi indépendamment du pas d'espace, pour des questions de stabilité de schéma numérique. On supposera donc que l'on dispose d'une variable globale `Delta_t` qui stocke la valeur de Δt. Aux fins d'applications numériques, la valeur de `Delta_t` sera précisée dans les questions où l'on en aura besoin.

2. Montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t}$$

et que :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

3. En déduire la relation de récurrence suivante pour $j \neq 0$ et $j \neq N-1$:

$$T_j^{n+1} = T_j^n + c(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \text{ avec } c = \frac{\Delta t D}{\Delta x^2}$$

4. Comment s'écrit la relation de récurrence précédente lorsque $j = 0$ et lorsque $j = N-1$?
5. Ecrire la fonction `initiallisation(L,N)` qui renvoie la liste comprenant les valeurs de T_j^0 respectant la condition initiale (C_1) de l'équation aux dérivées partielles (E_0).
6. Ecrire une fonction `transition(T,c,N, Tbord=300)` qui prend en argument c et une liste T contenant les valeurs de T^n pour un n quelconque et renvoie la liste constituée des éléments de T^{n+1}.
7. Ecrire une suite de commandes qui permet d'avoir une représentation graphique du profil en température toutes les 6 secondes.
   On prendra $\Delta T = 0,01$ s, $N = 101$, $L = 0,5$ m et $D = 1,2.10^{-4}$ m^2.s^{-1}.
   La température sera calculée jusqu'à un temps de 10 minutes.