

TP-cours Éc2. Échantillonnage et analyse spectrale

1. Principe et propriétés de l'échantillonnage d'un signal

a) Rôle de l'échantillonnage dans le traitement du signal

● Signaux analogiques et numériques

Un *signal analogique* est une fonction $f(t)$ décrivant l'évolution d'une grandeur physique (température, éclairage, position, accélération...) au cours du temps. Un *capteur* (accéléromètre, capteur photographique...) réalise la conversion d'un signal quelconque en un signal de tension $u(t)$, qui peut être visualisé sur un oscilloscope, et transformé par différents dispositifs d'électronique analogique (filtre, amplificateur...).

Un *signal numérique* est une suite de valeurs entières x_n codées en binaire sur un certain nombre de bits (valeurs 0 ou 1) : par exemple, un signal codé sur 8 bits peut prendre $2^8 = 256$ valeurs (de 0 à 11111111 en binaire, c'est-à-dire de 0 à 255 en base 10). Un tel signal est stocké sur un support numérique et peut être traité par divers procédés de calcul informatique (compression, calcul de transformée de Fourier...).

Le transport et le traitement de signaux numériques présentent de nombreux avantages par rapport à ceux de signaux analogiques (moindre sensibilité aux bruits, augmentation de la vitesse de transfert, plus grande facilité de modification...), c'est pourquoi la plupart des dispositifs actuels utilisent des signaux numériques.

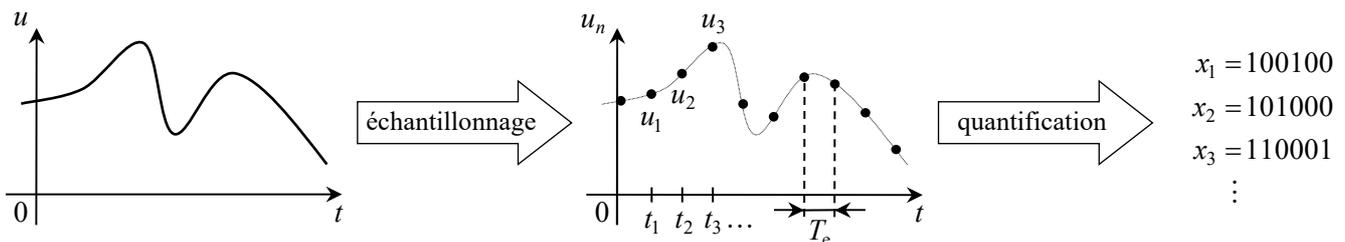
● Numérisation d'un signal

La transformation d'une tension analogique $u(t)$ en signal numérique x_n se fait en deux étapes.

– L'**échantillonnage** est une discrétisation en temps, qui consiste à transformer la fonction continue $u(t)$ en une fonction en escalier, en conservant seulement les valeurs de $u(t)$ à des instants $t_n = nT_e$; la fonction $u(t)$ est donc remplacée par une suite de réels $u_n = u(t_n)$. La durée T_e entre deux prélèvements est la *période d'échantillonnage*, son inverse $f_e = 1/T_e$ est la *fréquence d'échantillonnage*.

On s'intéressera ici à cette étape d'échantillonnage : principe, propriétés et contraintes.

– La **quantification**, réalisée par un *convertisseur analogique-numérique (CAN)*, est une discrétisation en valeurs : elle transforme la suite de réels u_n en une suite d'entiers x_n codés en binaire.



● Restitution du signal

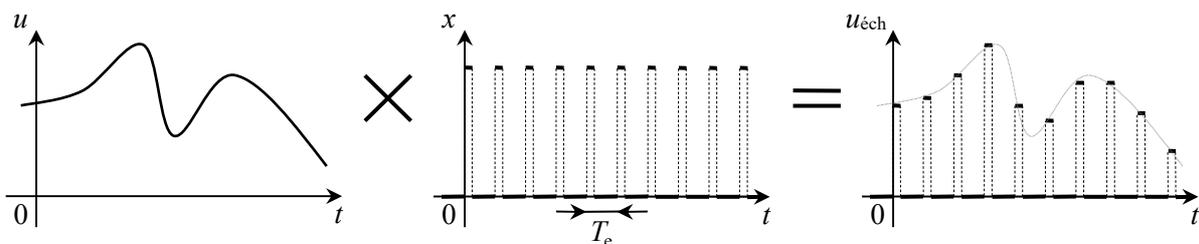
À la fin de la chaîne de transmission et de transformation du signal numérique, il est reconverti en signal analogique, par un convertisseur numérique-analogique (CNA) suivi d'un filtre de restitution, pour pouvoir être utilisé (dans un haut-parleur, sur un écran...).

Ce signal final obtenu doit être fidèle au signal initial : en particulier, son spectre doit contenir les mêmes fréquences que celui du signal initial, mais pas de fréquences supplémentaires.

b) Fonctionnement de l'échantillonnage

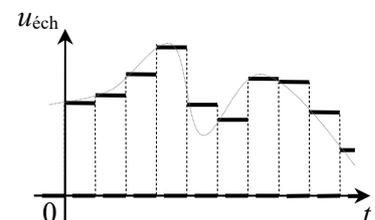
● Principe de l'échantillonnage

Échantillonner un signal revient à le multiplier par un signal $x(t)$ en « peigne », de fréquence $f_e = 1/T_e$. Cela peut être réalisé par exemple au moyen d'un circuit *multiplieur*, qui réalise l'opération $u_{\text{éch}}(t) = K u(t) \times x(t)$.



On peut le faire aussi avec un *échantillonneur-bloqueur*, dans ce cas chaque valeur prélevée est maintenue jusqu'au prélèvement suivant, il n'y a donc pas de « trou ».

L'analyse spectrale qui suit est la même dans les deux cas.



- Analyse spectrale et critère de Shannon

Considérons une composante sinusoïdale du signal $u(t) : A \cos(2\pi f t + \varphi)$, de fréquence f .

Le signal en peigne peut être lui-même décomposé en série de Fourier : $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n)$. Ainsi, lors de

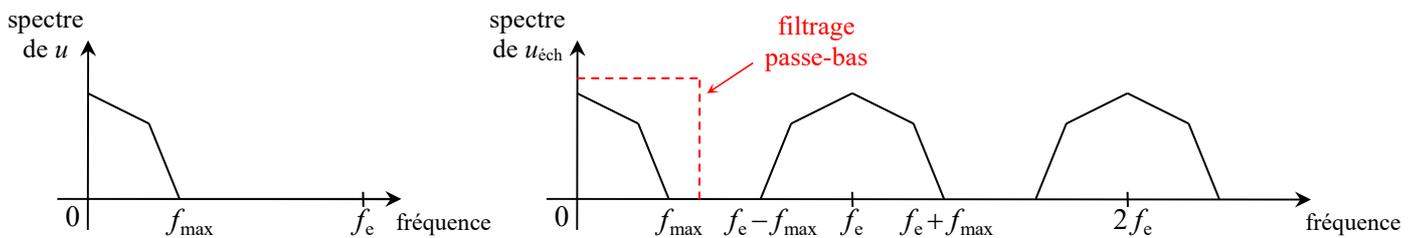
l'opération de multiplication, la composante de fréquence f devient :

$$K A \cos(2\pi f t + \varphi) \times \sum C_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n) = K A \sum C_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n) \cos(2\pi f t + \varphi)$$

$$= \frac{K A}{2} \sum C_n [\cos(2\pi(n f_e + f)t + \varphi_n) + \cos(2\pi(n f_e - f)t + \varphi_n)].$$

On obtient deux suites de termes de fréquences $(n f_e + f)$ et $(n f_e - f)$ dans le spectre du signal échantillonné $u_{\text{éch}}(t)$.

Pour un signal $u(t)$ dont le spectre comporte des fréquences f comprises entre 0 et f_{max} , on obtient pour $u_{\text{éch}}(t)$ un spectre comportant une suite de blocs dans des intervalles $[n f_e - f_{\text{max}} ; n f_e + f_{\text{max}}]$.

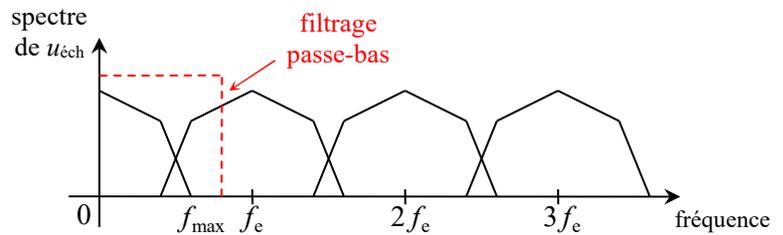


En fin de chaîne, un filtrage passe-bas permet de retrouver le spectre de $u(t)$. Mais il faut pour cela que cette partie du spectre ne se superpose pas au bloc suivant, ce qui est bien vérifié sur le spectre ci-dessus.

Le schéma ci-contre montre en revanche un mauvais choix de f_e (trop petite) : il y a *recouvrement de spectres* (*aliasing* en anglais), ou *sous-échantillonnage*.

Le signal sortant du filtre passe-bas contient alors des fréquences de la forme $(f_e - f)$, qui n'étaient pas présentes dans le signal d'origine.

La condition pour éviter le recouvrement de spectres est : $f_e - f_{\text{max}} > f_{\text{max}}$, soit $f_e > 2 f_{\text{max}}$ (critère de Shannon).



2. Mise en œuvre

a) Affichage du spectre d'un signal à l'oscilloscope numérique

- Obtention

Lorsqu'on observe un signal à l'oscilloscope, on peut voir l'allure de son spectre grâce à l'algorithme de *transformée de Fourier rapide*, ou FFT (*fast Fourier transform*). Pour cela, sélectionner l'opération FFT et la voie concernée (sur l'oscilloscope Tektronix : bouton *Math*, puis *FFT* puis *CHI* ; sur le Keysight, bouton *FFT* et *Source 1*) ; choisir la *fenêtre Hanning*. Les pics seront assez fins si on fait d'abord apparaître beaucoup de périodes du signal à l'écran.

- Affichage et réglages

L'oscilloscope affiche la valeur d'une graduation horizontale (en Hz ou kHz), et généralement la fréquence d'échantillonnage en S/s ou Sa/s, c'est-à-dire en échantillons par seconde (*samples per second*), ce qui est équivalent au hertz. Ce paramètre peut être réglé avec le bouton qui sert habituellement pour l'échelle de temps.

On peut aussi régler, comme toujours, l'échelle verticale ; les amplitudes sont indiquées en décibels (dB), et sur certains oscilloscopes on peut l'afficher aussi en volts (valeurs efficaces), ce qui évite de dilater les bruits parasites.

Par défaut, la fréquence nulle (composante continue du signal) est généralement à l'extrémité gauche de l'écran.

b) Étude de quelques cas

➔ Protocole 1

Fournir avec le GBF un signal composé d'une somme de deux sinusoïdes (*Dualtone*), de fréquences 1 kHz et 3 kHz.

– Observer le spectre avec une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz. Mesurer les fréquences et les amplitudes des pics avec des curseurs, et vérifier que ce spectre est correct.

– Observer maintenant le spectre avec une fréquence d'échantillonnage de 5 kHz. Mesurer les fréquences des deux pics, et vérifier que le second pic a une fréquence erronée, de la forme $(f_e - f)$, du fait du recouvrement de spectres.

➔ Protocole 2

Fournir un signal sinusoïdal de 2 kHz, *modulé en fréquence (FM)* dans un intervalle de 1 kHz, avec une fréquence de modulation de 0,1 Hz : sa fréquence oscille lentement (1 fois en 10 secondes) entre 1 kHz et 3 kHz. Observer le signal en fonction du temps, puis observer l'oscillation de fréquence sur son spectre.

➔ Protocole 3

Fournir un signal sinusoïdal de 1 kHz, *modulé en amplitude (AM)* avec une fréquence de modulation de 50 Hz. Observer le signal en fonction du temps (sur courte ou longue durée), puis observer son spectre et interpréter.