

On4 – Corrigé de l'exercice 2

□ Exercice 2

a) Pour une OPPH obéissant à l'équation de D'Alembert : $k = \frac{\omega}{c}$.

b) Onde incidente : $\underline{p}_i(M, t) = \underline{p}_{i0} \exp j(\omega t - kx)$ et $\underline{v}_i(M, t) = + \frac{\underline{p}_i(M, t)}{Z_a} \underline{e}_x = + \frac{\underline{p}_{i0}}{Z_a} \exp j(\omega t - kx) \underline{e}_x$.

Onde réfléchie : $\underline{p}_r(M, t) = \underline{p}_{r0} \exp j(\omega t + kx)$ et $\underline{v}_r(M, t) = - \frac{\underline{p}_{r0}}{Z_a} \exp j(\omega t + kx) \underline{e}_x$.

Onde transmise : $\underline{p}_t(M, t) = \underline{p}_{t0} \exp j(\omega t - kx)$ et $\underline{v}_t(M, t) = + \frac{\underline{p}_{t0}}{Z_a} \exp j(\omega t - kx) \underline{e}_x$.

c) On applique le PFD (ou TRC) à la paroi, d'aire S donc de masse σS , soumise aux forces de pression du fluide des deux côtés, ainsi qu'à des forces verticales (poids et réaction du support de la paroi) :

$$\sigma S \bar{a} = +P_1(0^-, t) S \underline{e}_x - P_2(0^+, t) S \underline{e}_x + m\bar{g} + \bar{R} = +p_1(0^-, t) S \underline{e}_x - p_2(0^+, t) S \underline{e}_x + m\bar{g} + \bar{R}$$

Projection sur \underline{e}_x : $\sigma \frac{d^2 \underline{\zeta}_0}{dt^2} = p_1(0^-, t) - p_2(0^+, t)$.

L'excitation (onde incidente) étant sinusoïdale, en régime permanent le mouvement de la paroi est aussi sinusoïdal : on peut écrire en

complexes $\underline{\zeta}_0(t) = \underline{\zeta}_m \exp(j\omega t)$, d'où $\frac{d^2 \underline{\zeta}_0}{dt^2} = -\omega^2 \underline{\zeta}_0$. On a donc obtenu : $-\sigma \omega^2 \underline{\zeta}_0(t) = \underline{p}_1(0^-, t) - \underline{p}_2(0^+, t)$.

- D'autre part, il y a continuité de la vitesse normale (c'est-à-dire de la vitesse tout court) sur chaque face de la paroi :

$\underline{v}_1(0^-, t) = \underline{v}_2(0^+, t) = \underline{v}_{\text{paroi}}(t)$ soit en complexes $\underline{v}_1(0^-, t) = \underline{v}_2(0^+, t) = j\omega \underline{\zeta}_0(t) \underline{e}_x$ (deux équations).

d) De façon habituelle, $\underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r$ et $\underline{p}_2 = \underline{p}_t$. Les conditions aux limites deviennent : $-\sigma \omega^2 \underline{\zeta}_m = \underline{p}_{i0} + \underline{p}_{r0} - \underline{p}_{t0}$ (1)

$\frac{\underline{p}_{i0}}{Z_a} - \frac{\underline{p}_{r0}}{Z_a} = j\omega \underline{\zeta}_m$ (2) et $\frac{\underline{p}_{t0}}{Z_a} = j\omega \underline{\zeta}_m$ (3). On injecte (3) dans (1) et (2) :

$$\begin{cases} \frac{\sigma j\omega}{Z_a} \underline{p}_{t0} = \underline{p}_{i0} + \underline{p}_{r0} - \underline{p}_{t0} \\ \underline{p}_{i0} - \underline{p}_{r0} = \underline{p}_{t0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sigma j\omega}{Z_a} \underline{t} = 1 + \underline{r} - \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \underline{t} \end{cases}$$

d'où finalement $\underline{t} = \frac{2}{2 + \sigma j\omega / Z_a}$ et $\underline{r} = \frac{\sigma j\omega / Z_a}{2 + \sigma j\omega / Z_a}$.

Le coefficient de transmission a la forme caractéristique d'un passse-bas d'ordre 1 : la paroi laisse passer surtout les sons graves.

e) Intensités acoustiques : $I_i = \langle \bar{P}_i \cdot \underline{e}_x \rangle = \langle p_i \underline{v}_i \cdot \underline{e}_x \rangle = \frac{\langle p_i^2 \rangle}{Z_a}$ d'où en complexes $I_i = \frac{|p_{i0}|^2}{Z_a}$; de même $I_r = \frac{|p_{r0}|^2}{Z_a}$ et $I_t = \frac{|p_{t0}|^2}{Z_a}$.

Alors $R = \frac{I_r}{I_i} = |\underline{r}|^2$ soit $R = \frac{(\sigma\omega/Z_a)^2}{4 + (\sigma\omega/Z_a)^2}$ et $T = \frac{I_t}{I_i} = |\underline{t}|^2$ soit $T = \frac{4}{4 + (\sigma\omega/Z_a)^2}$. On trouve bien $R + T = 1$.

f) Rappel : $I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{I}{I_0}$. Une atténuation de 30 dB (en transmission) correspond à $T = 10^{-3}$.

$T = \frac{4}{4 + (\rho e \omega / Z_a)^2} = 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\frac{\rho e \omega}{Z_a} \right)^2 = \frac{4}{T} - 4 \approx 4000$ d'où $e = \sqrt{4000} \frac{Z_a}{\rho \omega} = \sqrt{4000} \frac{\rho_{0,\text{air}} c_{\text{air}}}{\rho 2\pi f}$.

AN $e = \sqrt{4000} \frac{1,2 \times 340}{2500 \times 6,28 \times 1000}$ soit $e = 1,6 \text{ mm}$. Cet ordre de grandeur semble correct par rapport aux vitres usuelles.