Exercices du chapitre On5

Particule libre

1. Étalement du paquet d'ondes

On considère une particule quantique libre de masse m. Son état est représenté par un paquet d'ondes formé d'OPPH, dont les vecteurs d'onde sont distribués autour d'une valeur moyenne k_0 avec une faible dispersion Δk, qui détermine l'extension spatiale initiale $\Delta x(0)$ du paquet d'ondes. La pulsation temporelle moyenne correspondant à k_0 est notée ω_0.

a) Retrouver rapidement la relation de dispersion.

b) Rappeler la définition de la vitesse de groupe v_{g0} du paquet d'ondes, et donner son expression.

c) Montrer qu'à la largeur spectrale Δk correspond une dispersion de la vitesse de groupe Δv_g autour de la valeur moyenne v_{g0} et exprimer Δv_g en fonction de $\hbar$, m et $\Delta x(0)$, étalement initial supposé minimal.

d) En déduire la largeur du paquet d'ondes $\Delta x(t)$ après une durée t. Déterminer au bout de quelle durée t_2 la largeur du paquet d'ondes a doublé.

e) Faire l'application numérique pour un électron ($m = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg) initialement confiné dans un atome ($\Delta x(0) = 1\cdot 10^{-10}$ m). Comparer au temps qu'il met pour aller d'un atome à un autre dans un cristal, à une vitesse $v \approx 1\cdot 10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et commenter.

On donne $\hbar = 1{,}055\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$.

Particule dans un potentiel constant par morceaux

2. Électron confiné dans une molécule

Certaines molécules ayant une longue chaîne linéaire, comme le β-carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier, mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule.

On modélise un tel électron comme une particule se déplaçant librement sur un segment de droite, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$; l'énergie potentielle V est nulle sur le segment et infiniment grande partout ailleurs (puits rectangulaire infini).

On rappelle que pour un état stationnaire, la partie spatiale de la fonction d'onde $\varphi(x)$ est liée à l'énergie totale E de la particule par l'équation de Schrödinger stationnaire : $-\dfrac{h^2}{8\pi^2 m}\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = (E - V(x))\varphi(x)$ où $h = 6{,}626\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$.

a) Justifier que $\varphi(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle [0 ; L].

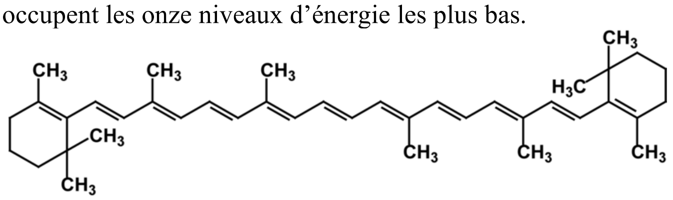
$\varphi(x)$ étant une fonction continue, elle est donc nulle aux deux extrémités de la molécule : $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

b) Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme $\varphi(x) = A\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ avec n un entier et A une constante.

c) Déterminer la valeur de A.

d) Déterminer l'expression des niveaux d'énergie E_n de l'électron en fonction de m, L, h et n.

Dans le β-carotène (formule ci-dessous), ce sont les électrons des onze liaisons doubles conjuguées qui se comportent comme des particules libres confinées, sur une longueur effective L = 1,83 nm. Dans l'état fondamental, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas.



e) Calculer les niveaux d'énergie E_{11} et E_{12}.

f) En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde λ dans le vide, d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12.

g) Expliquer la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles…).

3. Marche de potentiel

On étudie la réflexion et la transmission d'une particule par une marche de potentiel : l'énergie potentielle est nulle pour $x < 0$, et vaut V_0 pour $x > 0$.

Une particule libre venant de la partie $x < 0$ et se déplaçant vers les x croissants rencontre la marche de potentiel en $x = 0$. Elle possède initialement une énergie cinétique E.

a) Représenter la situation sur un schéma.

b) Étudier succinctement les deux cas possibles ($E < V_0$ ou $E > V_0$) dans le cadre de la mécanique classique.

Dans le cadre de la mécanique quantique, on recherche des états stationnaires, pour lesquels la partie spatiale de la fonction d'onde $\varphi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire : $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = (E - V(x))\varphi(x)$. La fonction $\varphi(x)$ et sa dérivée première sont supposées continues dans l'espace.

c) Étudier le cas $E > V_0$ en déterminant les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. Interpréter le cas $E \gg V_0$.

d) Dans le cas $E < V_0$, calculer ces deux coefficients et leurs modules, et commenter le résultat.

4. Noyau du deutérium

Le deutéron, noyau du deutérium (${}^2_1\mathrm{H}$), est constitué d'un proton et d'un neutron. Pour ce système de deux corps, on peut considérer une particule fictive de masse réduite $m = m_{\mathrm{nucl}}/2 = 8{,}37\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg}$, se trouvant dans un puits de potentiel créé par l'interaction forte. On adoptera le modèle simplifié suivant :

– le puits de potentiel est rectangulaire fini unidimensionnel, de profondeur V_0 = 21 MeV et de largeur effective a = 5,6 fm ;

– seules les fonctions d'onde antisymétriques sont possibles.

a) En utilisant le raisonnement graphique du cours (partie 3b), montrer que le deutéron n'a qu'un seul niveau d'énergie E.

On donne $\hbar = 1{,}055\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$ et les courbes de la page suivante : $v = u\tan(u)$ (en rouge) ; $v = -u\cot(u)$ (en bleu).

b) Justifier le nom d'*énergie de liaison* donné à la grandeur $(V_0 - E)$.

c) Déterminer cette énergie de liaison du deutéron (en MeV), et justifier pourquoi on dit que c'est un noyau faiblement lié.

d) Le deutéron pourrait-il exister si l'interaction forte était deux fois moins forte ? Quelle serait la conséquence sur l'Univers ?

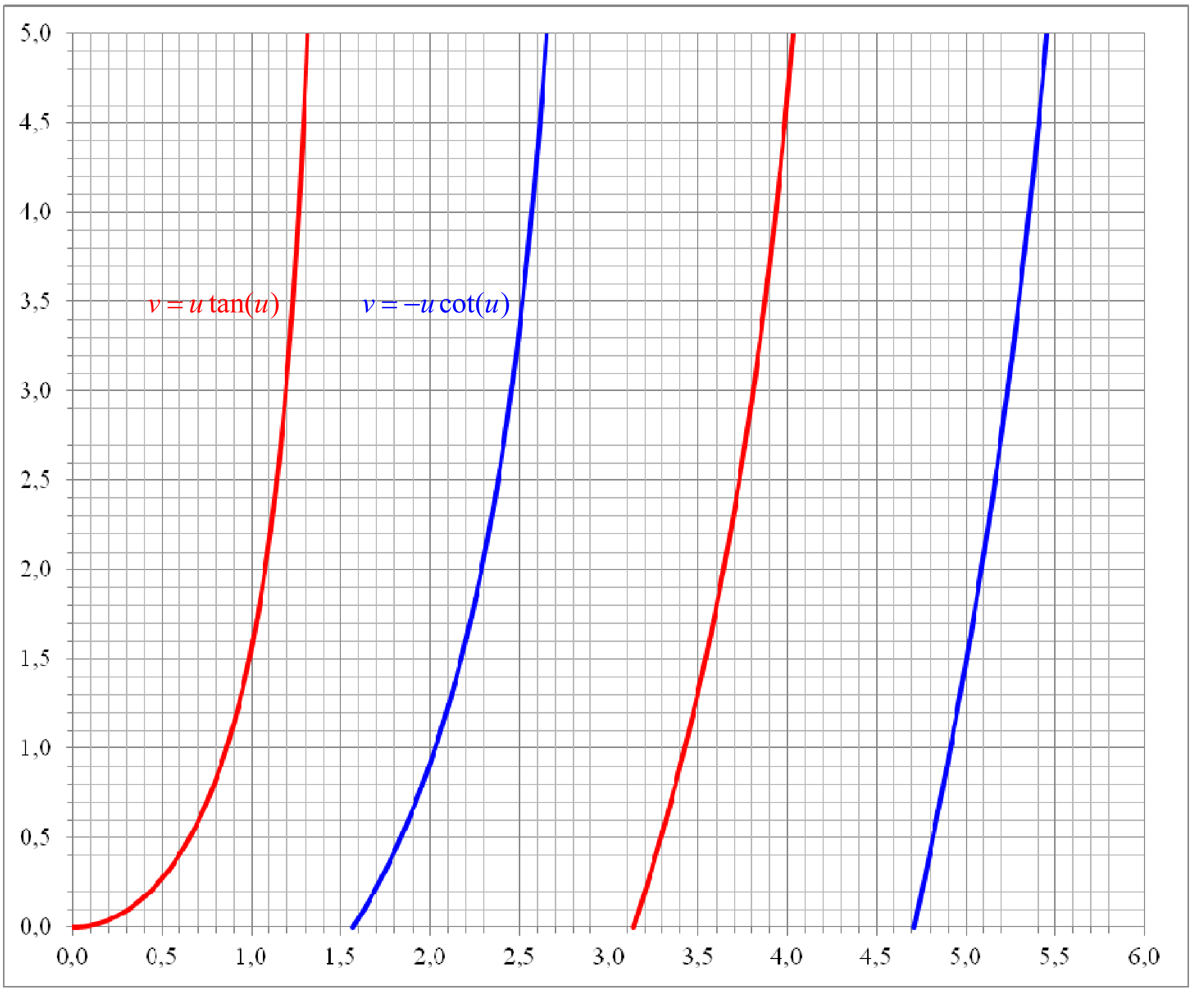
☞ *Réponses partielles*

1. c) $\Delta v_g = \dfrac{\hbar}{2m\,\Delta x(0)}$. e) $t_2 = 2\cdot 10^{-16}$ s.

2. f) λ = 480 nm.

3. c) $r = \dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}}$, $t = \dfrac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}}$.

d) $\underline{r} = \dfrac{\sqrt{E} - i\sqrt{V_0 - E}}{\sqrt{E} + i\sqrt{V_0 - E}}$, $\underline{t} = \dfrac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + i\sqrt{V_0 - E}}$.



Courbes plus détaillées pour les petites valeurs