

On5 – Corrigé de l'exercice 1

□ Exercice 1

a) La fonction d'onde de la particule libre obéit à l'équation de Schrödinger avec potentiel nul : $i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$.

On injecte dans cette équation la forme d'une OPPH, c'est-à-dire $\psi(x,t) = A \exp[-i(\omega t - kx)]$, et on simplifie par l'exponentielle :

$$\hbar\omega = k^2 \frac{\hbar^2}{2m} \text{ soit } \boxed{\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2}.$$

b) Vitesse de groupe du paquet d'ondes : $v_{g0} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$. Le calcul avec la relation de dispersion donne $v_{g0} = \frac{\hbar k_0}{m}$.

c) Pour chaque composante $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$, donc $\Delta v_g = \frac{\hbar}{m} \Delta k$. De plus, selon la relation d'indétermination de Heisenberg,

$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$, soit $\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$ avec $p_x = \hbar k$. Initialement on suppose l'extension spatiale minimale, soit $\Delta x(0) \cdot \Delta k = \frac{1}{2}$. Alors

$$\boxed{\Delta v_g = \frac{\hbar}{2m \Delta x(0)}}.$$

d) Après une durée t , la différence de distance parcourue entre les ondes les plus rapides et les plus lentes est $\Delta v_g \cdot t$: le paquet

d'ondes a donc une largeur $\boxed{\Delta x(t) = \Delta x(0) + \Delta v_g \cdot t}$. On obtient $\Delta x(t_2) = 2\Delta x(0)$ pour $\boxed{t_2 = \frac{2m(\Delta x(0))^2}{\hbar}}$.

e) AN $\boxed{t_2 = 2 \cdot 10^{-16} \text{ s}}$.

Dans un cristal, un électron libre va d'un atome à son voisin (distance $d \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) en une durée $t \approx \frac{d}{v} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$. Cette durée

est 10 fois plus grande que la durée d'étalement calculée précédemment, donc l'électron est très vite « étalé » sur un grand nombre d'atomes. Autrement dit, pour l'étude de la conduction électrique, la modélisation d'un électron comme une particule quasi ponctuelle (localisée) ne convient pas : les électrons doivent être considérés comme un ensemble de particules délocalisées sur l'ensemble du réseau.
