

Devoir d'entraînement de physique n° 7

Cet énoncé comporte trois problèmes.

Problème A (E3A MP 2016)
Microscopie en champ proche

La microscopie en champ proche tire profit de phénomènes physiques qui ont un effet notable sur des gammes de distances inférieures au micromètre. Il est ici proposé l'étude de deux instruments permettant d'imager des surfaces avec une résolution inférieure à 10 nm : le microscope à force atomique (AFM pour Atomic Force Microscope) et le microscope à effet tunnel (STM pour Scanning Tunneling Microscope).

Données :

- Rayon de Bohr : $a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹ (ou kg⁻¹.m⁻³.A².s⁴)
- Masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- Constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \cdot 10^{-34}$ J.s
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- Electronvolt : 1eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J

Troisième partie
MICROSCOPE A EFFET TUNNEL

La microscopie à effet tunnel (STM pour Scanning Tunneling Microscope) est une autre technique d'imagerie d'une surface, d'une efficacité comparable à celle de l'AFM. Les interactions mises en jeu sont cependant complètement différentes. Son principe repose sur l'effet tunnel entre une pointe (la sonde) et le matériau à imager.

H. Effet Tunnel

On considère une particule d'énergie E et de masse m en incidence sur la marche de potentiel représentée en figure 6. La particule ressent un potentiel nul dans la zone I et un potentiel V_0 dans la zone II. On décrit la particule par la fonction d'onde $\psi(x, t)$. Puisque le Hamiltonien du système ne dépend pas du temps, la particule est décrite sous forme d'états stationnaires où les dépendances spatiale et temporelle sont découplées. On aura alors $\psi(x, t) = \varphi(x) g(t)$.

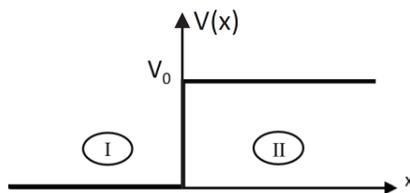


Figure 6. Profil d'une marche de potentiel de hauteur V_0 .

On rappelle l'équation de Schrödinger, dans le cas unidimensionnel de potentiel stationnaire :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t).$$

H1. Montrer que $g(t) = \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$ et que la fonction $\varphi(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + [E - V(x)]\varphi(x) = 0 \quad (\text{équation de Schrödinger stationnaire}).$$

H2. En déduire les expressions respectives des normes des vecteurs d'ondes k_I et k_{II} dans chacune des zones I et II. Vérifier l'homogénéité des expressions obtenues.

H3. En déduire qualitativement le comportement de la fonction d'onde décrivant la particule si $E > V_0$ et si $E < V_0$. Interpréter physiquement le résultat.

Considérons à présent une barrière de potentiel comme celle représentée en figure 7.

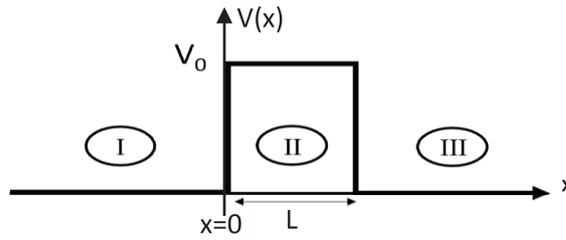


Figure 7. Profil d'une barrière de potentiel de hauteur V_0 et de largeur L .

H4. Donner l'expression de la norme du vecteur d'onde q dans la barrière.

H5. En utilisant l'équation de Schrödinger, on peut déterminer la forme des fonctions d'ondes dans chacune des zones I, II et III. Notamment, dans la zone III, la fonction d'onde est du type : $\varphi_{III}(x) = T e^{ikx}$ où k est la norme du vecteur d'onde. Justifier la forme de $\varphi_{III}(x)$.

En appliquant les conditions aux limites du problème, on peut déterminer l'expression de T , et dans le cas où $qL \gg 1$:

$$|T|^2 \approx \frac{16 k^2 q^2}{(k^2 + q^2)^2} e^{-2qL}$$

H6. Commenter l'hypothèse $qL \gg 1$. Pourquoi cette situation est-elle celle qui nous intéresse ?

H7. Quelle est la signification physique de $|T|^2$?

I. Le STM

Un STM utilise l'effet tunnel pour accéder à la topographie de la surface d'un échantillon, ie pour avoir accès à l'altitude x de la pointe par rapport à l'échantillon.

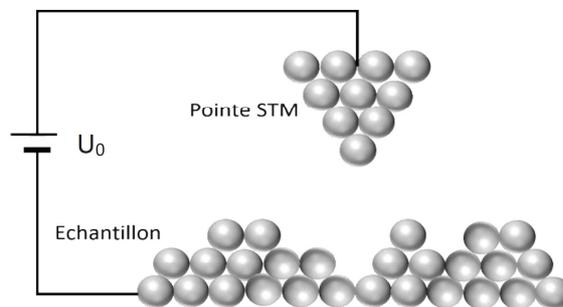


Figure 8. Microscope à effet tunnel. La pointe STM balaie la surface de l'échantillon pour en connaître la topographie.

La pointe conductrice est caractérisée par l'énergie E_P des électrons qui circulent dans la pointe. L'échantillon est quant à lui caractérisé par l'énergie E_E . L'espace entre la pointe et l'échantillon peut être vu comme une barrière de potentiel carré de hauteur V_0 et de largeur L .

I1. Représenter le profil énergétique ressenti par un électron qui voyagerait de la pointe vers l'échantillon.

En mécanique quantique, on définit le courant de probabilité $J(x)$ de manière analogue au courant de particules en mécanique classique. On peut alors montrer que :

$$J(x) = \frac{\hbar k}{m} |T|^2$$

où \hbar est la constante de Planck réduite

I2. Expliquer alors que la mesure du courant tunnel permet d'accéder à la topographie de la surface de l'échantillon.

Problème B (Centrale-Supélec TSI 2017)
Étude de la réflexion d'une onde électromagnétique

Dans cette partie nous allons nous intéresser à des milieux isolants non chargés, transparents et non absorbants. On admet que les propriétés de ces milieux sont semblables à celles du vide en remplaçant la permittivité ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$, ε_r désignant la permittivité relative du milieu.

II.A – Propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau isolant non chargé

II.A.1) Écrire les équations de Maxwell dans le milieu considéré en précisant leur nom.

II.A.2) Établir l'équation de propagation du vecteur champ électrique dans le milieu.

II.A.3) Exprimer la célérité de propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu et montrer que son indice est alors $n = \sqrt{\varepsilon_r}$.

II.A.4) On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant vers les x croissants de la forme

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

a) L'onde plane progressive est-elle polarisée rectilignement ? Si oui, dans quelle direction ?

b) Déterminer l'expression du vecteur d'onde \vec{k} . On montrera en particulier que $k = n \frac{\omega}{c}$.

c) Déterminer l'expression du vecteur champ magnétique associé.

II.B – Coefficients de transmission et réflexion en énergie à l'interface entre deux milieux

On s'intéresse à l'interface suivante entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , séparés par le plan $x = 0$.

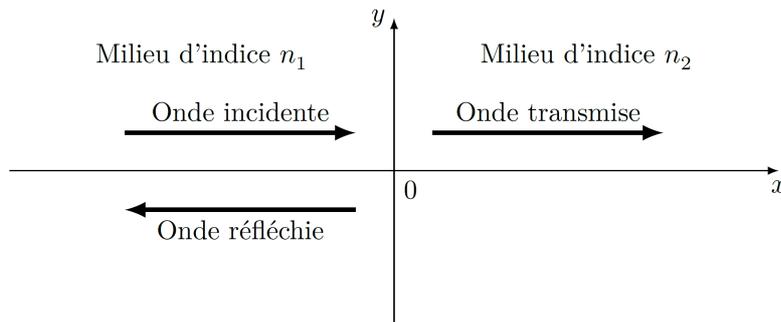


Figure 4

On considère une onde électromagnétique incidente, le vecteur champ électrique étant $\vec{E}_{\text{incident}} = \vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_y$. On note $\vec{E}_{\text{réfléchi}} = \vec{E}_2 = \rho E_0 \cos(\omega t + k_2 x) \vec{u}_y$ le champ électrique réfléchi et $\vec{E}_{\text{transmis}} = \vec{E}_3 = \tau E_0 \cos(\omega t - k_3 x) \vec{u}_y$ où ρ et τ désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

II.B.1) Justifier les formes des champs réfléchi et transmis fournis.

II.B.2) Quelle relation existe entre k_1 et k_2 ainsi qu'entre k_2 et k_3 ? Justifier.

II.B.3) Déterminer les expressions des champs magnétiques associés $\vec{B}_{\text{incident}}$, $\vec{B}_{\text{réfléchi}}$ et $\vec{B}_{\text{transmis}}$, notés respectivement \vec{B}_1 , \vec{B}_2 et \vec{B}_3 .

II.B.4) Les champs électriques et magnétiques doivent vérifier des relations dites de passage à l'interface entre les deux milieux. Compte tenu des propriétés des deux milieux, on admet que les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface.

Traduire ces deux relations et en déduire que $\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

II.B.5) Déterminer les expressions des vecteurs de Poynting pour les ondes incidente, réfléchi et transmise.

II.B.6) À l'aide d'un bilan énergétique clairement défini, déterminer les expressions des coefficients de réflexion et transmission en énergie à l'interface, notés respectivement R et T . L'énergie est-elle conservée ? Justifier.

Formulaire

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta(\vec{a})$$

Problème C (Mines-Ponts PC 2020)
Laser pulsé titane-saphir

(Dans le début du sujet, il est question de transformer un signal de pulsation ω en signal de pulsation 2ω .)

Pour engendrer dans l'échantillon des signaux à 2ω détectables, il faut l'exciter avec des champs incidents de pulsation ω d'amplitude E_0 suffisamment intense. Pour ce faire on utilise des lasers fournissant des impulsions temporelles, dont le milieu amplificateur est constitué d'un cristal de saphir dopé au ions titane (Ti : Saphir). Sur la figure 6 sont représentées les courbes spectrales d'émission et d'absorption relative de ce cristal.

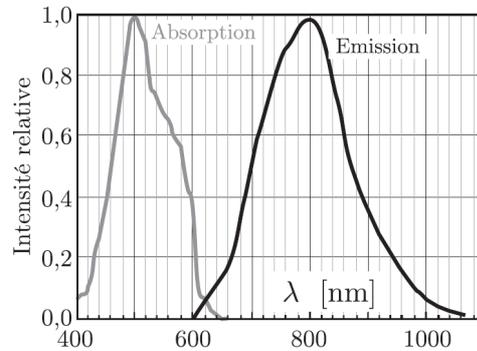


FIGURE 6 – Spectres d'émission et d'absorption du cristal de Ti : Saphir

□ **22** — En utilisant la relation liant la largeur spectrale $\Delta\nu$ (en Hertz) à la durée du train d'onde τ_c (en seconde) d'une source lumineuse : $\tau_c \Delta\nu \sim 1$, proposer un ordre de grandeur de la durée τ_c des impulsions délivrées par ce laser. On rappelle la valeur de la célérité de la lumière dans le vide $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On modélise l'émission du laser par le champ électrique $E(t)$ de la figure 7 en un point donné. La période de répétition des impulsions est $T = 1,25 \times 10^{-8} \text{ s}$, la durée des impulsions τ_c est dans la pratique égale à 10 fs (i.e. $1,00 \times 10^{-14} \text{ s}$). Sans respecter les échelles, on a représenté en bas de la figure 7, le spectre en amplitude $G(\omega)$ de $E(t)$. Le spectre est constitué d'un ensemble de raies régulièrement espacées de $\delta\omega$ disposées dans une enveloppe gaussienne centrée autour de la pulsation ω_0 et de largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$.

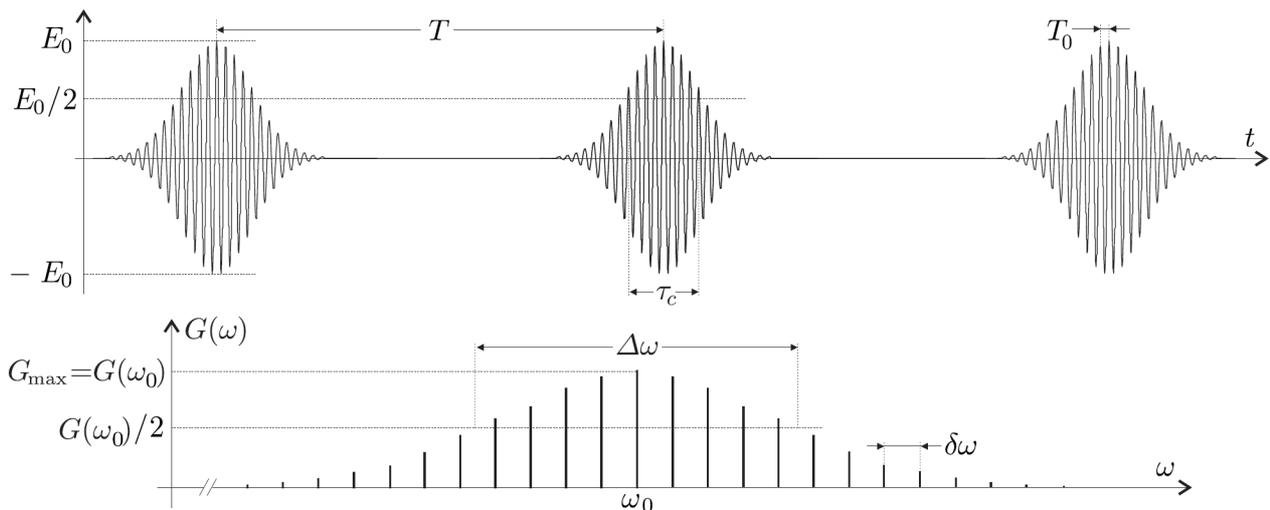


FIGURE 7 – Caractéristiques temporelles et spectrales du laser Ti : Saphir utilisé. En haut : Modèle d'émission pour le champ électrique $E(t)$ avec $T = 1,25 \times 10^{-8} \text{ s}$ et $\tau_c = 10 \text{ fs}$; en bas : spectre $G(\omega)$ de $E(t)$. Les échelles ne sont pas respectées.

□ **23** — A partir d'une lecture de la figure 6, estimer une valeur numérique raisonnable pour la pulsation ω_0 du laser. Relier les largeurs $\Delta\omega$ et $\delta\omega$ aux temps T et τ_c , puis calculer leurs valeurs numériques respectives.

La puissance moyenne du laser Ti : Saphir vaut $P = 1 \text{ W}$, le faisceau est supposé cylindrique de rayon $W_0 = 0,5 \text{ mm}$, le champ électrique associé $E(t)$ y est supposé uniforme, sa valeur maximale sera notée E_0 . Il peut donc être associé localement à une onde plane sur une section circulaire de rayon W_0 . En dehors de ce disque, on suppose le champ nul. Pour comprendre l'intérêt d'utiliser un laser pulsé, E_0 est comparé avec E'_0 correspondant à un laser quasi monochromatique émettant en continu à ω_0 , possédant les mêmes propriétés géométriques et la même puissance moyenne P .

□ 24 — Justifier le fait qu'il soit plus pertinent de comparer les carrés des champs que leurs amplitudes. En faisant les hypothèses simplificatrices nécessaires sur la forme de l'impulsion estimer l'ordre de grandeur du rapport $E_0^2/E_0'^2$. Commenter ce résultat.

La structure du faisceau émis suivant (Oz) du laser Ti : Saphir est en réalité gaussienne. Le champ électrique n'est plus supposé uniforme et se met sous la forme

$$E_0(W_0, x, z) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[- \left(\frac{x}{W(z)} \right)^2 \right]$$

Le paramètre W_0 , appelé waist, correspond au minimum de la demi-largeur du faisceau

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$$

La coordonnée z est mesurée sur l'axe du faisceau avec origine au waist et $z_R = \pi W_0^2/\lambda_0$ désigne la longueur de Rayleigh.

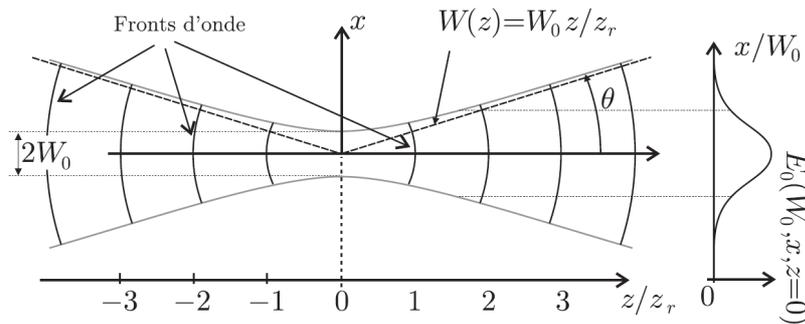


FIGURE 8 – Profil longitudinal et transversal du mode fondamental gaussien. La fonction $W(z)$ est tracée à gauche en fonction de z/z_R , et $E_0(W_0, x, z = 0)$ est tracé à droite en fonction de x/W_0 .

Sur la figure 8, on a représenté $W(z)$ en fonction de z/z_R ainsi que les variations de $E_0(W_0, x, z = 0)$ dans le plan du waist en fonction de x/W_0 . L'amplitude du champ électrique $\underline{E}(t, x, z)$ dans le plan (O, x, z) se met sous la forme :

$$\underline{E}(t, x, z) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[- \left(\frac{x}{W(z)} \right)^2 \right] \psi_{\omega_0}(t) e^{i\chi(z)} = E_0(W_0, x, z) \psi_{\omega_0}(t) e^{i\chi(z)}$$

où la fonction $\psi_{\omega_0}(t)$ permet de représenter l'impulsion temporelle étudiée auparavant. Le terme de phase $e^{i\chi(z)}$, ne jouera aucun rôle dans le raisonnement.

Le faisceau laser traverse l'objectif du microscope, il est focalisé en son foyer image F' . On prendra $CF' = f'_L = 1,00 \text{ mm}$. Le faisceau est représenté sur la figure 9.

□ 25 — En considérant un waist W_0 de $0,50 \text{ mm}$, calculer la valeur numérique de la longueur de Rayleigh z_R associée à ce laser. En déduire la raison pour laquelle le faisceau sera focalisé au foyer F' de l'objectif du microscope.

□ 26 — On note W'_0 le waist du faisceau en F' . Exprimer W'_0 en fonction de λ , f'_L et W_0 . Estimer sa valeur numérique.

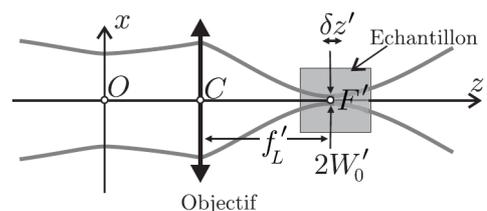


FIGURE 9 – Trajectoire du faisceau laser à travers l'objectif modélisé par une lentille mince convergente.

On admet que $2W'_0$ correspond à la résolution latérale de l'objectif. Après la lentille, on repère la position sur l'axe (Oz) par la coordonnée z' dont l'origine est prise en F' .

L'amplitude du champ électrique $E_0(W'_0, x, z')$ associé au laser focalisé sera d'autant plus importante qu'on se rapproche de F' . Pour apprécier la résolution axiale de l'objectif, il faut trouver la profondeur $\delta z'$ autour de F' sur laquelle $E_0(W'_0, x, \pm \delta z'/2)$ reste suffisant pour générer dans l'échantillon un signal à 2ω détectable. On estime ainsi que si l'intensité du signal à $2\omega_0$ en $z'/2$ est divisée par 10 par rapport à l'intensité maximale en $z = f'_L$, alors elle ne sera plus suffisante.

L'intensité du signal à 2ω est proportionnelle au carré du champ électrique à 2ω , lui-même proportionnel au carré du champ incident à ω_0 . La profondeur $\delta z'$ est donc définie par la relation

$$\frac{E_0^4(W'_0, x = 0, z' = \pm \delta z'/2)}{E_0^4(W'_0, x = 0, z' = 0)} = \frac{1}{10}$$

□ 27 — Exprimer $\delta z'$ en fonction de W'_0 et λ puis estimer sa valeur numérique.