

Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 7**▣ Problème A**

H1. On injecte la forme cherchée dans l'équation de Schrödinger : $i\hbar \varphi(x)g'(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x)g(t) + V(x)\varphi(x)g(t)$ d'où en séparant les variables : $i\hbar \frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x)$. Ceci ne peut être qu'une constante, qui a la dimension d'une énergie : c'est l'énergie E de la

particule. Alors $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + [E - V(x)]\varphi(x) = 0$ et $g'(t) = \frac{E}{i\hbar} g(t) = -i\frac{E}{\hbar} g(t)$. Solution : $g(t) = A \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$ et on peut prendre

$A = 1$, soit $g(t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$ puisqu'il y a déjà une constante multiplicative dans $\varphi(x)$.

H2. Dans la zone I, l'équation s'écrit : $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + E\varphi(x) = 0$ soit $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k_I^2\varphi(x) = 0$ en posant $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. La solution est de la forme $\varphi_I(x) = B \exp(ik_I x) + C \exp(-ik_I x)$ donc k_I représente bien la pulsation spatiale (norme du vecteur d'onde) d'une OPPH.

De même, dans la zone II, on a $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + [E - V_0]\varphi(x) = 0$ soit $\frac{d^2\varphi}{dx^2} \pm k_{II}^2\varphi(x) = 0$ avec $k_{II} = \frac{\sqrt{2m|E - V_0|}}{\hbar}$.

Dimension : $[E] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$, $[m] = [M]$, $[\hbar] = [E \cdot T] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-1}]$ d'où $[k] = [L^{-1}]$ qui est bien la dimension attendue.

H3. – Si $E > V_0$, l'équation est $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k_{II}^2\varphi(x) = 0$ donc $\varphi_{II}(x) = D \exp(ik_{II}x) + F \exp(-ik_{II}x)$, ce qui correspond à des ondes progressives. On peut exclure le second terme, car il ne peut pas y avoir d'onde réfléchie dans ce domaine : $\varphi_{II}(x) = D \exp(ik_{II}x)$ d'où

$\psi_{II}(x,t) = D \exp(ik_{II}x - i\omega t)$ avec $\omega = \frac{E}{\hbar}$. Il y a donc dans ce cas une onde progressive transmise dans la zone II, donc une probabilité importante de trouver la particule à grande distance au-delà de la frontière. Cela correspond au comportement classique d'une particule qui franchit la marche (en ayant perdu de la vitesse, ce qui correspond à $k_{II} < k_I$).

– Si $E < V_0$, l'équation est $\frac{d^2\varphi}{dx^2} - k_{II}^2\varphi(x) = 0$ donc $\varphi_{II}(x) = G \exp(k_{II}x) + H \exp(-k_{II}x)$. Cette fois on peut exclure le premier terme, car il diverge en $+\infty$: $\varphi_{II}(x) = H \exp(-k_{II}x)$ d'où $\psi_{II}(x,t) = H \exp(-k_{II}x) \exp(i\omega t)$. On reconnaît dans ce cas une onde évanescence dans la zone II, qui exprime une probabilité non nulle de trouver la particule juste derrière la frontière, mais une absence d'onde progressive transmise dans la zone II : la particule est essentiellement réfléchie par la marche. Cela correspond au comportement classique d'une particule qui n'a pas l'énergie suffisante pour franchir la barrière, et revient donc en arrière.

H4. Dans la zone II, l'équation s'écrit à nouveau : $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + [E - V_0]\varphi(x) = 0$ soit $\frac{d^2\varphi}{dx^2} \pm q^2\varphi(x) = 0$ avec $q = \frac{\sqrt{2m|E - V_0|}}{\hbar}$. Le cas

où on parle d'effet tunnel est $E < V_0$, où on posera donc $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$.

H5. On retrouve ici une onde progressive dans la zone III, avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, se propageant dans les sens des x croissants car il n'y a pas de réflexion au-delà de la barrière.

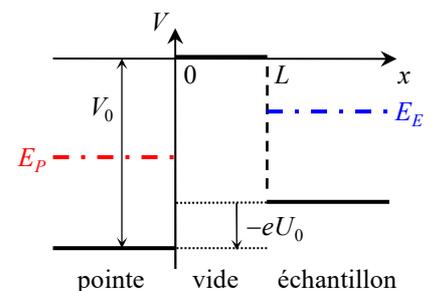
H6. $qL \gg 1$ est l'hypothèse de la barrière épaisse : c'est le cas où la probabilité pour la particule de traverser la barrière est extrêmement faible, mais avec une dépendance simple (exponentielle) de la largeur L .

H7. $|T|^2 = |\varphi_{III}(x)|^2 = |\psi_{III}(x,t)|^2$ est la densité linéique de probabilité de présence de la particule dans la zone III.

II. La tension U_0 entre la pointe et l'échantillon correspond à une différence d'énergie potentielle : d'après le dessin des bornes du générateur, l'énergie potentielle dans la pointe comporte un terme supplémentaire $-eU_0 < 0$. Ainsi le profil énergétique est dissymétrique : la hauteur de la barrière dépend du côté d'où vient l'électron ; mais avec une tension appliquée ainsi, le profil de la barrière ne serait pas rectangulaire : l'énoncé est inexact. Par ailleurs, les notations définies dans l'énoncé ne sont pas claires : considérons que V_0 est la hauteur de la barrière (travail d'extraction) vue depuis la pointe, et que E_P et E_E sont les énergies *totales* des électrons dans les deux zones *pour une même énergie cinétique* (donc même écart avec le potentiel). Le profil est alors le suivant (en traits pleins).

Dans ce cas l'électron circulerait plus probablement de l'échantillon vers la pointe (et non l'inverse comme indiqué dans l'énoncé).

II2. Le courant électrique mesuré est proportionnel au courant de probabilité, donc au facteur $\exp(-2qL)$ où L est la distance entre la pointe et l'échantillon. Ainsi, si on balaie la surface en élevant ou abaissant la pointe de façon à maintenir un courant constant, on sait que la distance L reste aussi constante, ainsi le mouvement vertical de la pointe nous donne le relief de l'échantillon.



□ **Problème B**

II.A.1) Équation de Maxwell–Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$ (milieu non chargé). Équation de Maxwell–Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Équation de Maxwell–Thomson (ou Maxwell–flux) : $\text{div } \vec{B} = 0$. Équation de Maxwell–Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (milieu isolant).

II.A.2) On utilise la formule d'analyse vectorielle $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ soit $\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \text{grad}(0) - \Delta \vec{E}$
 $\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\Delta \vec{E}$ et finalement $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

II.A.3) Cette équation peut se mettre sous la forme canonique de D'Alembert : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ en introduisant la célérité

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ dans le milieu, } c \text{ étant celle dans le vide. L'indice étant défini par } v = \frac{c}{n}, \text{ on a donc trouvé } n = \sqrt{\epsilon_r}.$$

II.A.4.a) Cette onde plan est polarisée rectilignement dans la direction (Oy) , puisque le champ est toujours parallèle à cette direction.

II.A.4.b) On injecte la forme du champ dans l'équation d'onde : $-k^2 \vec{E} + \frac{1}{v^2} \omega^2 \vec{E} = 0$ d'où $k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}$. De plus l'onde se propage

selon l'axe (Ox) vers les x croissants, donc $\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u}_x$.

II.A.4.c) On peut utiliser l'une des équations de Maxwell, ou bien pour une OPPH utiliser la relation de structure :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(M, t)}{\omega} \text{ soit } \vec{B}(M, t) = \frac{n E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

II.B.1) La forme de l'onde (OPPH) et la pulsation temporelle ω ne dépendent pas du milieu, elles sont les mêmes pour les trois ondes ; en revanche, la pulsation spatiale k dépend du milieu. Par ailleurs, la phase du champ réfléchi comporte le signe + devant x car elle se propage vers les x décroissants, tandis que celle du champ transmis a le signe - devant x car elle se propage vers les x croissants.

II.B.2) La pulsation spatiale k dépend du milieu selon la formule $k = n \frac{\omega}{c}$. Donc $k_2 = k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ (milieu 1) et $k_3 = \frac{n_2}{n_1} k_2$ (milieu 2).

$$\text{II.B.3) Comme ci-dessus : } \vec{B}_1 = \frac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_z ; \vec{B}_2 = -\frac{n_1 \rho E_0}{c} \cos(\omega t + k_2 x) \vec{u}_z ; \vec{B}_3 = \frac{n_2 \tau E_0}{c} \cos(\omega t - k_3 x) \vec{u}_z.$$

II.B.4) Continuité de \vec{E} : $\vec{E}_1(0^-, t) + \vec{E}_2(0^-, t) = \vec{E}_3(0^+, t) \Leftrightarrow E_0 \cos(\omega t) + \rho E_0 \cos(\omega t) = \tau E_0 \cos(\omega t)$ donc $1 + \rho = \tau$.

Continuité de \vec{B} : $\vec{B}_1(0^-, t) + \vec{B}_2(0^-, t) = \vec{B}_3(0^+, t) \Leftrightarrow \frac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t) - \frac{n_1 \rho E_0}{c} \cos(\omega t) = \frac{n_2 \tau E_0}{c} \cos(\omega t)$ donc $n_1(1 - \rho) = n_2 \tau$.

Donc $n_1(1 - \rho) = n_2(1 + \rho)$ d'où $\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $\tau = 1 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ soit $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

$$\text{II.B.5) } \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \text{ donc } \vec{\Pi}_{\text{inc}} = \frac{n_1 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_1 x) \vec{u}_x ; \vec{\Pi}_{\text{réf}} = -\frac{n_1 \rho^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + k_2 x) \vec{u}_x ; \vec{\Pi}_{\text{tran}} = \frac{n_2 \tau^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_3 x) \vec{u}_x.$$

II.B.6) Considérons une surface d'aire S sur l'interface. Puissance reçue par cette surface : $\mathcal{P}_{\text{inc}} = \vec{\Pi}_{\text{inc}}(0, t) \cdot S \vec{u}_x = \frac{n_1 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t) S$.

Puissance réfléchie : $\mathcal{P}_{\text{réf}} = \vec{\Pi}_{\text{réf}}(0, t) \cdot S(-\vec{u}_x) = \frac{n_1 \rho^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t) S$. Puissance transmise : $\mathcal{P}_{\text{tran}} = \vec{\Pi}_{\text{tran}}(0, t) \cdot S \vec{u}_x = \frac{n_2 \tau^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t) S$.

Le coefficient de réflexion en puissance est défini par $R = \frac{\mathcal{P}_{\text{réf}}}{\mathcal{P}_{\text{inc}}}$ donc $R = \rho^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$. Et le coefficient de transmission est défini

par $T = \frac{\mathcal{P}_{\text{tran}}}{\mathcal{P}_{\text{inc}}}$ donc $T = \frac{n_2}{n_1} \tau^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$. On vérifie que $R + T = 1$, ce qui exprime la conservation de l'énergie.

□ **Problème C** (corrigé rédigé par Jean-Marie BIAN SAN)

22. On évalue sur la figure 6 la largeur à mi-hauteur de la raie d'émission : $\Delta \lambda \approx 1,9 \cdot 10^2$ nm. Or $\nu = c/\lambda$, donc $\Delta \nu = \frac{c}{\lambda_m^2} \Delta \lambda$ avec $\lambda_m \approx 8,0 \cdot 10^2$ nm. Or $\tau_c \sim 1/\Delta \nu$, d'où $\tau_c \approx 1,2 \cdot 10^{-14}$ s. Ceci correspond bien à la valeur 10 fs donnée par l'énoncé.

23. $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_m} \approx 2,3 \cdot 10^{15}$ rad s⁻¹.

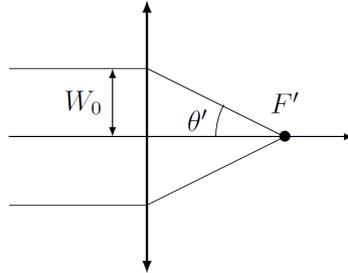
$$\Delta \omega = 2\pi \Delta \nu \sim \frac{2\pi}{\tau_c}, \text{ soit } \Delta \omega \approx 6,3 \cdot 10^{14} \text{ rad s}^{-1}.$$

$$\delta \omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ soit } \delta \omega \approx 4,2 \cdot 10^8 \text{ rad s}^{-1}.$$

24. La puissance est liée au vecteur de Poynting qui fait intervenir le champ électrique au carré, et les détecteurs optiques sont sensibles à la puissance lumineuse.

Pour le laser continu : $P = CE_0'^2$. Pour le laser pulsé, en considérant que les impulsions ont une forme quasi-rectangulaire de largeur τ_c et se répètent tout les T : $P = CE_0'^2 \frac{\tau_c}{T}$. On obtient donc : $\frac{E_0^2}{E_0'^2} = \frac{T}{\tau_c} \approx 1,3 \cdot 10^6 \gg 1$. D'où $E_0 \approx 10^3 E_0'$: on peut ainsi générer des champs électriques très intenses avec une puissance raisonnable.

25. $z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda_m} \approx 1 \text{ m} \gg f'_L$. On peut donc raisonnablement supposer qu'on a placé l'objectif dans la zone de Rayleigh du laser, où le faisceau laser est quasi-cylindrique et parallèle à l'axe optique : diffraction négligeable. En considérant qu'on peut alors utiliser les lois de l'optique géométrique pour ce faisceau quasi-cylindrique, ce dernier viendra converger au foyer F' .



26. Nous pouvons déterminer l'angle θ' par deux méthodes, dans l'hypothèse des petits angles. En utilisant la figure 8 pour le faisceau émergent, il vient $\theta' = \frac{W'(z)}{z} = \frac{W_0'}{z'_R} = \frac{\lambda}{\pi W_0'}$. En utilisant

le schéma ci-dessus : $\theta' = \frac{W_0}{f'_L}$. On obtient ainsi $W_0' = \frac{\lambda f'_L}{\pi W_0}$.

A.N. : $W_0' \approx 0,5 \mu\text{m}$.

27. En réalisant le rapport demandé, on obtient après simplification : $\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta z'^2}{4z_R'^2}\right)^2} = \frac{1}{10}$, d'où

$$\delta z' = 2z'_R \sqrt{\sqrt{10} - 1} = 2 \frac{\pi W_0'^2}{\lambda} \sqrt{\sqrt{10} - 1}.$$

A.N. : $\delta z' \approx 3 \mu\text{m}$.