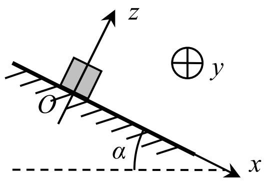
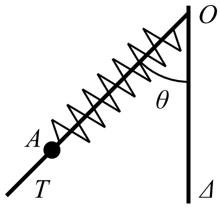
Exercices de révisions de mécanique

Mouvement ou équilibre sur un support

1. Équilibre puis glissement sur un plan incliné
Une caisse de masse m est posée sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les frottements solides entre la caisse et le plan sont caractérisés par un coefficient f.
a) On suppose la caisse immobile. Calculer l'angle maximal $\alpha_{\max}$ pour que ce soit possible. Que se passe-t-il si $\alpha > \alpha_{\max}$?
b) On suppose maintenant que la caisse glisse sur le plan incliné, en partant du point O sans vitesse initiale. Déterminer son équation horaire $x(t)$.



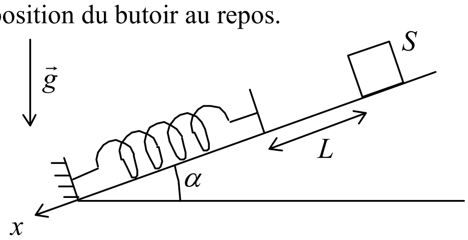
2. Longueur d'équilibre d'un ressort
Un système est constitué d'une tige T soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical Δ. Un anneau A, assimilé à un point matériel de masse m, est astreint à coulisser sans frottements le long de T, inclinée d'un angle θ fixe par rapport à la verticale. Cet anneau est aussi accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixée au bâti en un point O (voir schéma ci-dessous).



a) Le système est immobile. Calculer la longueur ℓ_1 du ressort.
b) Le système est mis en rotation autour de l'axe Δ avec une vitesse angulaire ω constante. On suppose qu'au bout d'un certain temps le ressort acquiert une longueur constante ℓ_2. Déterminer cette nouvelle longueur d'équilibre du ressort, ainsi que la réaction $\vec{R}$ de T sur A ; commenter le signe de sa ou ses composantes.

Théorèmes énergétiques

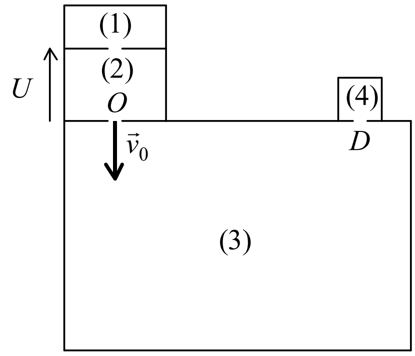
3. Compression d'un ressort
On abandonne sans vitesse initiale un solide S de masse m sur un plan parfaitement lisse, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. S glisse alors le long de la ligne de plus grande pente sur une distance L, avant de rencontrer un butoir (sans masse) solidaire d'un ressort idéal de raideur k.
On note x l'abscisse de la face inférieure de S, l'origine O étant la position du butoir au repos.



a) Pouvez-vous dire sans calcul en quel point la vitesse de S sera maximale ?
b) Déterminer l'abscisse maximale X_m atteinte par S (compression maximale du ressort). On posera $b = \dfrac{m g \sin\alpha}{k}$.
c) Calculer en quel point la vitesse de S est maximale… et comparer à votre réponse à la question a.

Mouvement d'une particule dans un champ

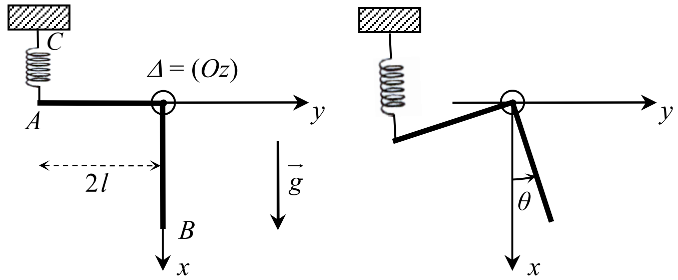
4. Spectrographe de masse
Le principe d'un spectrographe de masse est le suivant.



Dans la chambre d'ionisation (1), on produit des ions Zn^{2+} de masse m et de charge $q = 2\,e$. Ces ions pénètrent avec une vitesse négligeable dans une enceinte accélératrice (2), où règne un champ électrique créé par une tension U entre les deux plaques limitant (2). Ils en sortent en O avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\,\vec{e_x}$, et pénètrent alors dans l'enceinte (3) où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de figure.
a) Indiquer le sens du champ $\vec{E}$ accélérateur dans (2). Exprimer la norme de la vitesse $\vec{v_0}$ en fonction de e, m et U.
b) Indiquer le sens du champ magnétique permettant aux ions d'être déviés en direction du détecteur (4).
c) Déterminer les trois équations du mouvement dans (3). En résolvant l'une des trois, montrer que le mouvement est plan.
d) Pour résoudre les deux équations différentielles couplées, on procède comme suit : intégrer une première fois l'une des équations, et reporter le résultat dans l'autre, ce qui donne une équation d'oscillateur harmonique. Déterminer ainsi les deux équations horaires dans le plan du mouvement.
On posera $\omega_c = \dfrac{2eB}{m}$.
e) En déduire que le mouvement des ions dans (3) est circulaire uniforme, de centre Ω et de rayon R à préciser.
f) L'élément zinc contient deux isotopes de nombres de masse $A_1 = 68$ et $A_2 = 70$. On souhaite recueillir au point D (fente d'entrée du détecteur) l'isotope 68 seulement. Calculer la position du détecteur (distance OD).
g) Les faisceaux d'ions ont en fait eux-mêmes une certaine largeur : pourquoi ? Quelle est alors la largeur optimale de la fente d'entrée du détecteur ?
Application numérique : $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $U = 4{,}0$ kV ; $B = 0{,}10$ T ; $u = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg (unité de masse atomique).

Théorème du moment cinétique

5. Pendule pesant et élastique
Un solide S est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre, AO et OB, faisant entre elles un droit. Chaque tige a pour masse m et pour longueur $2l$. S peut tourner autour d'un axe horizontal $\Delta = (Oz)$ passant par O.
La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'une de ses extrémités en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontale et OB verticale.
On se propose d'étudier l'équilibre, puis les oscillations autour de la position d'équilibre. L'angle θ restant petit, on pourra considérer que la force exercée par le ressort sur le solide reste toujours verticale.



On donne le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur $2l$, par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et qui passe par une extrémité : $J_1 = \dfrac{4}{3} m l^2$.

a) Que vaut le moment d'inertie de l'ensemble des deux tiges par rapport à l'axe Δ ?
b) Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.
c) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que le mouvement est sinusoïdal et donner l'expression de la période en fonction de m, g, k et l.

Mouvement à force centrale

6. Erreur de satellisation
On souhaite lancer un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M de masse m, sur une orbite circulaire autour du centre O de la Terre. Pour cela, on doit l'amener à la distance r_0 du centre de la Terre, et lui donner une vitesse $\vec{v}$ orthoradiale avec une valeur très précise.
a) Démontrer que le mouvement d'un satellite, soumis uniquement à la force de gravitation terrestre, est nécessairement plan.
b) La position de M étant décrite par ses coordonnées polaires r et θ, déterminer une intégrale première en fonction de r et $\dot{\theta}$.
c) Montrer qu'un mouvement circulaire du satellite est nécessairement uniforme. Calculer alors la valeur à donner à v pour obtenir la trajectoire de rayon r_0.
d) En déduire dans ce cas la valeur de la constante des aires C et de l'énergie mécanique E_m.

Le satellite ayant été amené à la distance r_0, une petite erreur est commise dans la direction de la vitesse : le vecteur $\vec{v'}$ a la norme voulue mais il fait un petit angle α avec le vecteur $\vec{e_\theta}$.
e) Quelles sont alors les valeurs de la constante des aires et de l'énergie mécanique ?
f) Le satellite décrit alors une ellipse au lieu d'un cercle. Déterminer la longueur du grand axe de l'ellipse. Représenter en conséquence, sur un même schéma, la trajectoire circulaire souhaitée et la trajectoire réelle.

Mouvement en référentiel non galiléen

7. Force de Coriolis sur un train
Un train à grande vitesse, de masse $m = 2{,}0\cdot 10^6$ kg, circule du nord vers le sud à la vitesse $v = 300\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. À l'instant considéré, il se trouve à la latitude $\lambda = 49°$ nord.
Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormale $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ avec $\vec{e_x}$ vers l'est, $\vec{e_y}$ vers le nord et $\vec{e_z}$ vers le zénith.
a) Faire un schéma de la Terre (en coupe ou en perspective) en faisant apparaître les éléments suivants : le méridien (et éventuellement le parallèle) passant par P ; la base ci-dessus ; le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre, ainsi que la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre.
b) Déterminer l'expression de cette force de Coriolis. Faire l'application numérique, et comparer au poids du train.
On prendra $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
c) Faire cette fois un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies par le train. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui changerait si le train allait vers le nord ?

Équations locales de la dynamique

8. Fluide visqueux entraîné par une plaque
On considère une plaque solide plane supposée infinie confondue avec le plan (Oxz). Le demi-espace $y > 0$ est rempli d'un fluide visqueux incompressible de viscosité dynamique η. La plaque est animée d'une vitesse sinusoïdale d'expression : $\vec{v_0} = V_\mathrm{m} \cos(\omega t)\, \vec{e_x}$.
On néglige l'action de la pesanteur.
a) Écrire l'équation de Navier–Stokes dans ce cas.
b) De quelles variables dépend la vitesse dans le fluide ? Quelle est sa direction ?
c) Montrer que dans ce cas l'accélération convective est nulle. En déduire que la pression est uniforme. Quelle est l'équation vérifiée par la vitesse ?
d) On cherche la solution sous la forme complexe :
$$\underline{\vec{v}} = f(y) \exp(j\omega t)\, \vec{e_x}.$$
Déterminer la forme générale de $f(y)$, en introduisant la grandeur $\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\rho\omega}}$. En déduire l'expression réelle du champ de vitesse.
e) Quelle est la signification de δ ? Calculer sa valeur pour l'eau ($\eta = 1{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}$) à une fréquence de 5 Hz.
f) Cette situation peut servir à modéliser la transmission d'une secousse sismique de cisaillement à travers la partie liquide du noyau terrestre, extrêmement visqueuse et de masse volumique importante. Déterminer δ pour la fréquence de 5 Hz, sachant que la viscosité cinématique des roches est $\nu = 0{,}01\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$. Que peut-on en conclure sur la propagation des ondes sismiques de cisaillement ?

☞ *Réponses partielles*

1. a) $\alpha_\mathrm{max} = \arctan f$. **2.** b) $\ell_2 = \dfrac{k\ell_0 + m g \cos\theta}{k - m\omega^2 \sin^2\theta}$. **3.** b) $X_\mathrm{m} = b + \sqrt{b^2 + 2bL}$.

4. c) $\ddot{x} = -\omega_\mathrm{c} \dot{y}$; $\ddot{y} = +\omega_\mathrm{c} \dot{x}$; $\ddot{z} = 0$. d) $\ddot{x} + \omega_\mathrm{c}^2 x = 0$ d'où $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_\mathrm{c}} \sin(\omega_\mathrm{c} t)$.

5. c) $\ddot{\theta} + \dfrac{4kl^2 + mgl}{2J_1}\theta = 0$. **8.** b) $\vec{v}(M,t) = v_x(y,t)\, \vec{e_x}$.