

Th1 – Corrigé des exercices 2, 3 et 4

□ Exercice 2

a) $H(T, P) = U + PV = U(T) + nRT + nbP$. On dérive par rapport à T , à P constante : $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \frac{dU}{dT} + nR + 0 = C_V + nR$
d'où pour une mole : $C_{P,m} = C_{V,m} + R$. Il s'agit de la relation de Mayer, vue pour un gaz parfait, et qui est donc valable aussi pour ce gaz non parfait. Alors en combinant avec $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$ on obtient toujours : $C_{V,m} = \frac{R}{\gamma-1}$ et $C_{P,m} = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$.

b) La détente de Joule–Thomson est isenthalpique (voir exemple 3.a dans le cours). On peut donc écrire : $\Delta H = 0$

$$\Leftrightarrow \Delta U + nR\Delta T + nb\Delta P = 0 \Leftrightarrow (C_V + nR)\Delta T + nb\Delta P = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma nR}{\gamma-1}\Delta T + nb\Delta P = 0 \text{ d'où finalement } \Delta T = \frac{1-\gamma}{\gamma R}b(P_2 - P_1).$$

c) AN $\Delta T = 0,99 \text{ K}$.

□ Exercice 3 (fin)

a) Vu en classe.

b) $dV = -\chi_T V dP + \alpha V dT$ soit $\frac{dV}{V} = -\chi_T dP + \alpha dT$ (vu en classe).

c) Pour un gaz parfait : $PV = nRT$ soit $V = \frac{nRT}{P}$. Donc $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \left(\frac{nRT}{P} \right)}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \frac{nR}{P}$ soit $\alpha = \frac{1}{T}$.

Et de même $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \left(\frac{nRT}{P} \right)}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(-\frac{nRT}{P^2} \right)$ soit $\chi_T = \frac{1}{P}$.

d) Pour un gaz parfait dans ces conditions, on calcule $\alpha = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$. Les valeurs des coefficients thermoélastiques du métal sont donc beaucoup plus faibles que celle du gaz parfait.

En effet, un métal est beaucoup plus dense qu'un gaz, et ses particules ne peuvent pratiquement pas se rapprocher car elles sont déjà « au contact » les unes des autres : le métal est donc beaucoup moins compressible qu'un gaz.

De plus, ces faibles distances font que les forces d'interactions interparticulaires, à l'échelle microscopique, y sont beaucoup plus importantes que dans un gaz (elles sont même négligées pour un gaz parfait) ; or ces forces attractives s'opposent à l'éloignement des particules : un métal est donc beaucoup moins dilatable qu'un gaz.

e) On utilise le résultat de la question b avec $dV = 0$, d'où $dP = \frac{\alpha}{\chi_T} dT$. Après intégration, on obtient $P_1 = P_0 + \frac{\alpha}{\chi_T}(T_1 - T_0)$.

AN $P_1 = 720 \text{ bar}$. La pression qu'il faudrait exercer est extrêmement élevée : en pratique, on n'essaie jamais d'empêcher la dilatation des métaux (mais on en tient compte dans la construction des édifices à structure métallique).

□ Exercice 4

a) Premier principe industriel : $h_4 - h_3 = q_{3 \rightarrow 4} + w'_{3 \rightarrow 4}$. Or la vanne ne permet ni les échanges de chaleur, ni les échanges de travail utile (puisque'elle est indéformable et sans pièce mobile) : $q_{3 \rightarrow 4} = w'_{3 \rightarrow 4} = 0$ donc $h_3 = h_4$ (isenthalpique).

b) Voir diagrammes, courbes en bleu.

Valeurs lues sur le diagramme (t, s) :

	P (bar)	t (°C)	h (kJ·kg ⁻¹)	s (kJ·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)
(1)	2,2	-10	182	0,70
(2)	15	+68	216	0,70
(3)	15	+60	96	0,34
(4)	2,2	-10	96	0,37

c) À une température donnée T_0 [où $T_0(\text{K}) = t_0(^\circ\text{C}) + 273$] : $\ell = h_v - h_\ell$ et $\ell = T_0(s_v - s_\ell)$ (avec les indices v pour la vapeur saturée et ℓ pour le liquide saturé).

AN pour $P_0 = 3 \text{ bar}$: $t_0 = 0^\circ\text{C}$ et $\ell = 186 - 37 = 149 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ou bien $\ell = 273(0,69 - 0,14) = 150 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

d) Entropie du mélange : $S = S_v + S_\ell = m_v s_v + m_\ell s_\ell = m_v s_v + (m - m_v) s_\ell$ (par extensivité). On divise par la masse totale m :

$$s = x s_v + (1-x) s_\ell \text{ d'où on tire } x = \frac{s - s_\ell}{s_v - s_\ell}.$$

Puisque s est l'abscisse sur le diagramme (t, s) , cela se traduit par le rapport de longueurs $\frac{LM}{LV}$ si M est le point considéré, L et V les extrémités gauche et droite du palier.

De même $x = \frac{h - h_\ell}{h_v - h_\ell}$, qui se traduit également par $\frac{LM}{LV}$ sur le diagramme (P, h) .

e) En (4) : $x = \frac{5,2}{11,9}$ [avec les longueurs en centimètres sur le diagramme (t, s)] ou $x = \frac{4,3}{9,8}$ [sur le diagramme (P, h)], soit

$x = 0,44$. Cette valeur est confirmée par les courbes isotitres : le point (4) est entre les isotitres 0,4 et 0,5, un peu plus près de 0,4.

f) $q_c = h_3 - h_2$ et $q_f = h_1 - h_4$. AN $q_c = -120 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $q_f = +86 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

g) De même $w'_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1$. AN $w'_{1 \rightarrow 2} = +34 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

L'efficacité est le rapport (en valeur absolue) entre le transfert recherché (ici q_f , refroidissement de la source froide) et le transfert dépensé pour l'obtenir (ici le travail total sur le cycle $w'_{\text{total}} = w'_{1 \rightarrow 2}$). AN $\varepsilon = 2,5$.

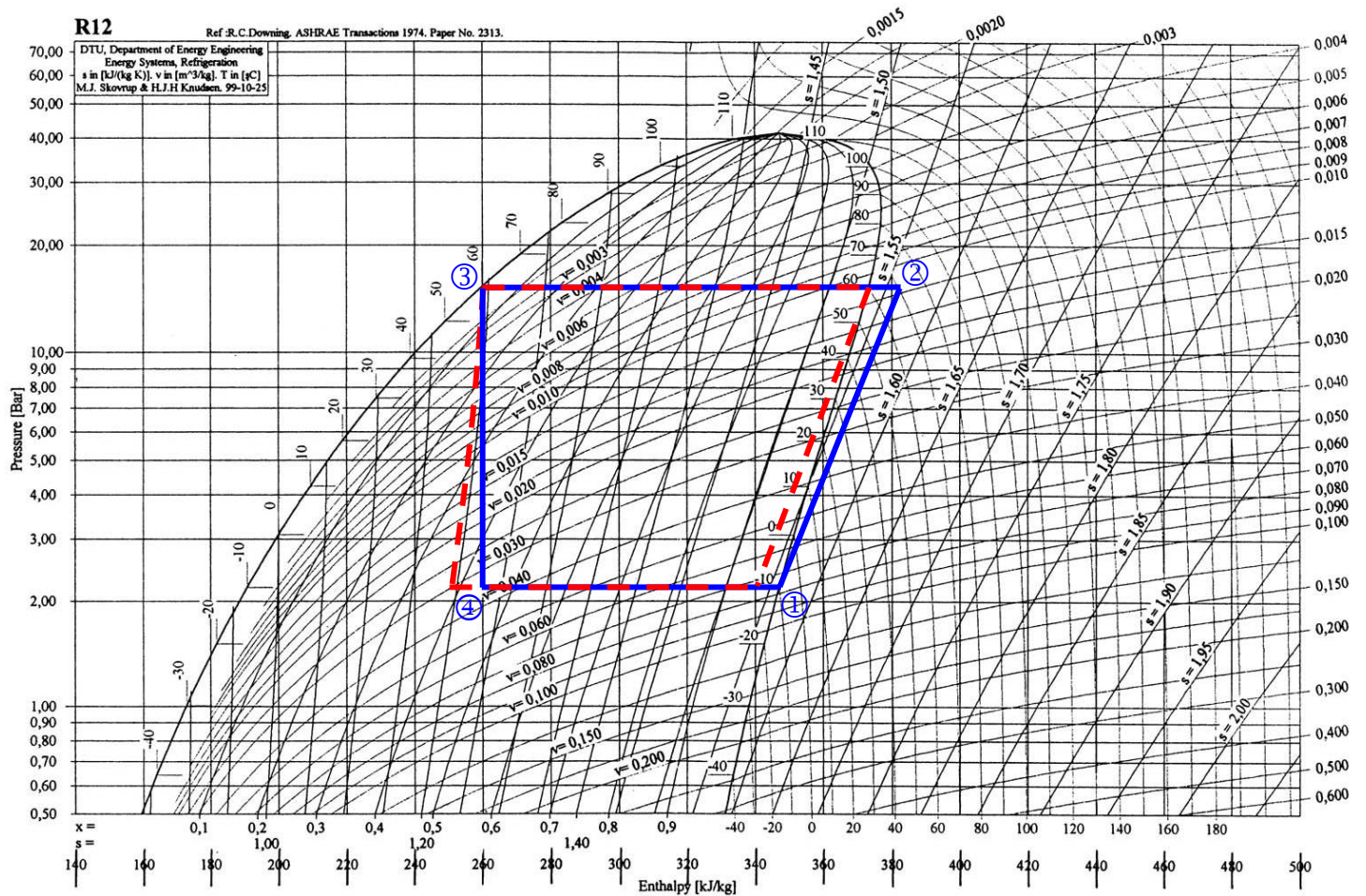
h) La température $t_3 = 60^\circ \text{C}$ a été déterminée à la question b. Sur le diagramme (P, h) , on suit (tant bien que mal !) l'allure des courbes isentropiques. Sur le diagramme (t, s) c'est plus simple, le cycle est rectangulaire.

Voir diagrammes, courbes en pointillés rouges.

i) L'efficacité peut se calculer comme précédemment : $q_c = h_3 - h_{2'} = -114 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $q_f = h_1' - h_{4'} = +90 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, et cette fois $w'_{\text{total}} = w'_{1 \rightarrow 2'} + w'_{3' \rightarrow 4'} = h_{2'} - h_{1'} + h_{4'} - h_3 = -q_c - q_f = +24 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, d'où $\varepsilon_{\text{Carnot}} = 3,8$.

Elle peut aussi se calculer, de façon plus théorique, en appliquant les deux principes au fluide sur un cycle : $w'_{\text{total}} + q_f + q_c = 0$ et

$$\frac{q_f}{T_1} + \frac{q_c}{T_3} = 0 \text{ (réversibilité) d'où } \varepsilon_{\text{Carnot}} = \frac{q_f}{-q_c - q_f} = \frac{T_1}{T_3 - T_1}. \text{ AN } \varepsilon_{\text{Carnot}} = 3,8.$$



(Second diagramme page suivante)

