Th2 – Corrigé des exercices 1, 2 (fin), 3 et 4

¤ **Exercice 1**

(Voir le cours pour les trois premières questions)

a) Le bilan donne $\dfrac{\partial c}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_n}{\partial x}$, d'où en injectant la loi de Fick $j_n = -D\dfrac{\partial c}{\partial x}$: $\boxed{\dfrac{\partial c}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}}$.

b) En ordres de grandeur : $\boxed{T = \dfrac{L^2}{D}}$.

c) En régime stationnaire on établit : $\boxed{c(x) = \dfrac{c_2 - c_1}{L}x + c_1 = -\dfrac{\Delta c}{L}x + c_1}$ d'où $\boxed{j_n = D\dfrac{\Delta c}{L}}$ (indépendant de x).

d) Bilan de quantité de matière pour le récipient 1 entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$: $n_1(t+\mathrm{d}t) - n_1(t) = -\delta n_{\text{sortant de 1}}$

$\Leftrightarrow [c_1(t+\mathrm{d}t) - c_1(t)]V_1 = -j_n S\,\mathrm{d}t = -D\dfrac{\Delta c(t)}{L}S\,\mathrm{d}t$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t} = -D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_1}S$. Il y a deux fonctions différentes dans l'équation, il nous faut une autre équation. On fait de même un bilan pour le récipient 2 : $n_2(t+\mathrm{d}t) - n_2(t) = +\delta n_{\text{entrant dans 2}}$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}c_2(t)}{\mathrm{d}t} = +D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_2}S$.

Finalement on soustrait membre à membre :

$\dfrac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}c_2(t)}{\mathrm{d}t} = -D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_1}S - D\dfrac{\Delta c(t)}{LV_2}S$ soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\Delta c(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{DS}{L}\left(\dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}\right)\Delta c(t) = 0}$ (linéaire d'ordre 1, sans second membre).

e) Solution : $\boxed{\Delta c(t) = \Delta c(0)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$ avec $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{DS}{L}\left(\dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}\right)$ soit $\boxed{\tau = \dfrac{L}{DS}\dfrac{V_1V_2}{V_1 + V_2}}$. Comme on peut le prévoir qualitativement, l'écart de concentration tend vers zéro : la concentration s'homogénéise entre les deux récipients.

¤ **Exercice 2** (fin)

a) On a établi : $\dfrac{\partial n^*(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{k}{\tau} - \dfrac{1}{\tau}n^*(x,t)$.

b) En régime stationnaire elle devient : $\dfrac{\mathrm{d}^2 n^*(x)}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{1}{L_\mathrm{m}^2}n^*(x) = \dfrac{-k}{L_\mathrm{m}^2}$. Solution générale : $n^*(x) = A\exp\left(+\dfrac{x}{L_\mathrm{m}}\right) + B\exp\left(-\dfrac{x}{L_\mathrm{m}}\right) + k$.

Conditions aux limites : $n^*(0) = A + B + k$; et en L qui tend vers l'infini, le terme $A\exp\left(+\dfrac{x}{L_\mathrm{m}}\right)$ divergerait, ce qui est impossible, donc nécessairement $A = 0$, d'où $B = n^*(0) - k$. Finalement : $\boxed{n^*(x) = [n^*(0) - k]\exp\left(-\dfrac{x}{L_\mathrm{m}}\right) + k}$.

c) $\overrightarrow{j_N}(x) = -D\dfrac{\partial n^*}{\partial x}\overrightarrow{e_x}$ soit $\boxed{\overrightarrow{j_N}(x) = +\dfrac{D}{L_\mathrm{m}}[n^*(0) - k]\exp\left(-\dfrac{x}{L_\mathrm{m}}\right)\overrightarrow{e_x}}$. Flux de particules à travers une section : $\Phi(x) = \iint_A \overrightarrow{j_N}(x)\cdot\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}s = A\dfrac{D}{L_\mathrm{m}}[n^*(0) - k]\exp\left(-\dfrac{x}{L_\mathrm{m}}\right)$. Or chaque particule a une charge q, et l'intensité électrique est le flux (ou débit) de charges, donc : $\boxed{I(x) = qA\dfrac{D}{L_\mathrm{m}}[n^*(0) - k]\exp\left(-\dfrac{x}{L_\mathrm{m}}\right)}$.

¤ **Exercice 3**

a) Dans le modèle du gaz parfait : $n^* = \dfrac{N}{V} = \dfrac{\mathcal{N}_\mathrm{A} n}{V} = \dfrac{\mathcal{N}_\mathrm{A} P}{RT}$ donc à saturation : $\boxed{n^*_\text{sat} = \dfrac{\mathcal{N}_\mathrm{A} P_\text{sat}}{RT}}$.

b) Voir cours pour l'établissement de l'équation de bilan en symétrie sphérique : $\boxed{\dfrac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\left[r^2 j_{N,r}(r,t)\right]}{\partial r}}$.

c) On injecte $j_{N,r} = -D\dfrac{\partial n^*}{\partial r}$ dans l'équation précédente, d'où : $\boxed{\dfrac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} = \dfrac{D}{r^2}\dfrac{\partial\left[r^2\dfrac{\partial n^*(r,t)}{\partial r}\right]}{\partial r}}$. (Ne pas développer la dérivée !)

d) En régime stationnaire, l'équation devient : $\dfrac{\mathrm{d}\left[r^2\dfrac{\mathrm{d}n^*(r)}{\mathrm{d}r}\right]}{\mathrm{d}r} = 0$ d'où en intégrant une première fois : $r^2\dfrac{\mathrm{d}n^*(r)}{\mathrm{d}r} = \text{cte}$ et on note cette constante $-A$ pour obtenir ensuite la cohérence avec les notations de l'énoncé. Ceci équivaut à $\dfrac{\mathrm{d}n^*(r)}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{A}{r^2}$. On intègre une deuxième fois : $n^*(r) = \dfrac{A}{r} + B$. Conditions aux limites : $n^*(\infty) = H n^*_\text{sat} = B$; et $n^*(a) = n^*_\text{sat} = \dfrac{A}{a} + B$ d'où $A = a\,n^*_\text{sat}(1-H)$. Finalement : $\boxed{n^*(r) = n^*_\text{sat}\left[\dfrac{a(1-H)}{r} + H\right]}$.

e) $j_{N,r}(r) = -D\dfrac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r} = Dn^*_\text{sat}\dfrac{a(1-H)}{r^2}$ donc $\boxed{j_{N,r}(a) = Dn^*_\text{sat}\dfrac{1-H}{a}}$.

Bilan de masse pour la goutte entre t et $t+\mathrm{d}t$: $m(t+\mathrm{d}t)-m(t) = -\delta m_{\text{évap}} = -m_{\text{moléc}}\,\delta N_{\text{évap}} = -\dfrac{M}{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}}\Phi(a)\,\mathrm{d}t = -\dfrac{M}{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}}\, j_{N,r}(a)4\pi a^2\,\mathrm{d}t$ d'où en divisant par $\mathrm{d}t$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{M}{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}}\,D n^*_{\text{sat}}(1-H)4\pi a}$.

¤ <u>Exercice 4</u>

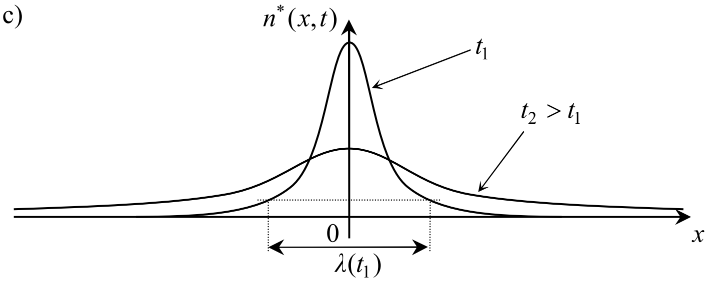
a) Équation de diffusion en l'absence de création/consommation : $\boxed{\dfrac{\partial n^*}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}}$.

b) On trouve bien pour les limites : $\boxed{n^*(x,t)\xrightarrow[t\to 0]{} 0,\ \forall x\neq 0}$, $\boxed{n^*(0,t)\xrightarrow[t\to 0]{} +\infty}$ et $\boxed{n^*(x,t)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0,\ \forall t}$.

Dérivons cette fonction : $\dfrac{\partial n^*}{\partial t} = -\dfrac{A}{2t^{3/2}\sqrt{D}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right) + \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{x^2}{4Dt^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$; $\dfrac{\partial n^*}{\partial x} = -\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{2x}{4Dt}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$

puis $\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = -\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{2}{4Dt}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right) + \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\left(\dfrac{2x}{4Dt}\right)^2\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$. On vérifie donc bien l'équation de diffusion.

c)



La fonction est de plus en plus « étalée », avec un maximum central de moins en moins élevé. L'aire sous la courbe reste constante, car elle est proportionnelle au nombre total de particules (voir question suivante).

d) Population totale : $N = \iiint_{\text{feuille}} n^*(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\,l\,e\,A\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{Dt}} = 2\,l\,e\,A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u = 2\,l\,e\,A\sqrt{\pi}$ donc $\boxed{A = \dfrac{N}{2le\sqrt{\pi}}}$.

e) $n^*\left(\dfrac{\lambda(t)}{2},t\right) = \dfrac{n^*(0,t)}{10} \Leftrightarrow \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\dfrac{\lambda(t)^2}{16Dt}\right) = \dfrac{A}{10\sqrt{Dt}} \Leftrightarrow \exp\left(-\dfrac{\lambda(t)^2}{16Dt}\right) = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{\lambda(t) = 4\sqrt{Dt\ln 10}}$. Comme on l'attendait, la largeur de la tache augmente <u>proportionnellement à la racine carrée de la durée</u> (et à celle du coefficient de diffusion).