

**Corrigé du devoir test de physique n° 1**

**▣ Problème A**

**A1.a)** On applique le premier principe à une masse de fluide parcourant un cycle :  $\Delta H = 0 = W + Q_{ch} + Q_{fr}$ . De même le second

principe donne :  $\Delta S = 0 = 0 + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} + \frac{Q_{fr}}{T_{fr}}$ . Le rendement est :  $r_C = \frac{-W}{Q_{ch}} = \frac{Q_{ch} + Q_{fr}}{Q_{ch}} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$  soit finalement  $r_C = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$ .

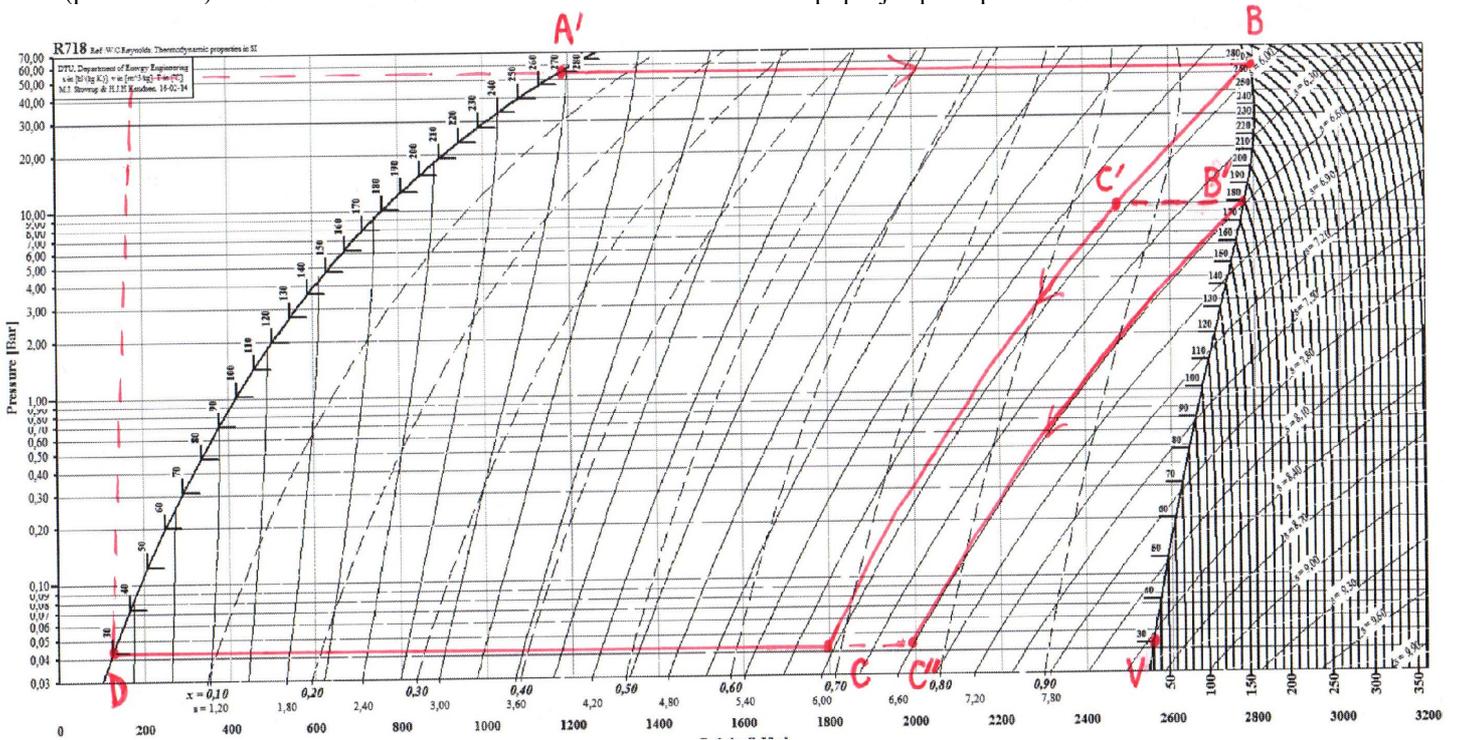
**A1.b)** AN  $r_C = 0,44$  (ou 44 %).

**A1.c)**  $r_{réel} = \frac{P_c}{P_t}$  car  $P_c = P_{méca} \cdot AN$   $r_{réel} = 0,32$  (ou 32 %). Ce rendement réel est nettement inférieur à celui d'un cycle de Carnot : en effet, dans un cycle réel il y a toujours des causes d'irréversibilité.

**A2.b)**

	A'	B	D
$\theta$ (°C)	270	270	30
$h$ (kJ·kg <sup>-1</sup> )	1190,10	2788,46	125,22
$s$ (kJ·K <sup>-1</sup> ·kg <sup>-1</sup> )	2,9853	5,9226	0,4348

**A2.c)** On place D et A' sur la courbe d'ébullition (partie gauche de la courbe de saturation), à 30 °C et 270 °C, et B sur la courbe de rosée (partie droite) à 270 °C. De B à C on suit l'allure d'une courbe isentropique jusqu'au palier à 30 °C.



**A2.d)**  $h_{sortie} - h_{entrée} = w_u + q$ .

**A2.e)**  $q_{BC} = 0$  (adiabatique) donc  $w_{BC} = h_C - h_B$ . AN On peut estimer  $h_C = 1795$  kJ·kg<sup>-1</sup>, d'où  $w_{BC} = -993$  kJ·kg<sup>-1</sup>.

**A2.f)**  $w_{AA'} = 0$  (pas de pièces mobiles) donc  $q_{AA'} = h_{A'} - h_A = c(T_{A'} - T_A)$  (phase liquide). AN  $q_{AA'} = +1000$  kJ·kg<sup>-1</sup>.

**A2.g)** De même  $q_{A'B} = h_B - h_{A'}$ . AN  $q_{A'B} = +1598,36$  kJ·kg<sup>-1</sup> (avec les valeurs du tableau).

**A2.h)**  $r_R = \frac{-w_{u,total}}{q_{ch}}$  soit  $r_R = \frac{-w_{BC}}{q_{AA'} + q_{A'B}}$  (car  $w_{DA}$  est négligeable). AN  $r_R = 0,38$  (ou 38 %). On trouve  $r_R < r_C$ , car ce cycle comporte des étapes irréversibles (échauffement du liquide...). Mais  $r_R > r_{réel}$ , donc le cycle de Rankine est encore une modélisation trop

idéale du cycle réel (les transformations dans la turbine et la pompe ne sont pas rigoureusement adiabatiques ni réversibles...).

**A2.i)** À la fin de la détente, au point C, l'eau est sous forme diphasée : on détermine  $x_C = 0,69$  d'après les isotitres, ou en calculant  $x_C = \frac{DC}{DV} = \frac{13,9}{20,15} = 0,69$  (longueurs mesurées en cm sur le palier). La présence d'eau liquide dans la turbine augmente fortement

l'usure mécanique et la corrosion des pales.

**A3.a)** (Voir diagramme ci-dessus.)

**A3.b)** On lit  $x_{C'} = 0,85$  et  $x_{C''} = 0,77$ . Dans chacune des deux turbines, la quantité maximale d'eau liquide est nettement plus faible (15 % et 23 %) que dans le premier cycle sans surchauffe (31 %) : on a donc limité les problèmes d'usure évoqués ci-dessus.

**A3.c)** Maintenant  $r = \frac{-w_{BC'} - w_{B'C''}}{q_{AA'} + q_{A'B} + q_{C'B'}}$  soit  $r = \frac{-h_{C'} + h_B - h_{C''} + h_{B'}}{q_{AA'} + q_{A'B} + h_{B'} - h_{C'}}$ . AN  $r = \frac{-2470 + 2788,46 - 1995 + 2777,84}{1000 + 1598,36 + 2777,84 - 2470}$  soit  $r = 0,38$ .

Le rendement n'est pas amélioré par la surchauffe, qui sert uniquement à réduire les problèmes d'usure de la turbine.

### ▣ Problème B

**B1.a)** Pour une transformation monobare, la fonction d'état qui convient pour l'application du premier principe est l'enthalpie.

**B1.b)** Premier principe pour le système {billes de verre, eau, calorimètre} :  $\Delta H_{\text{totale}} = Q_{\text{fuites}} = 0$  soit  $\Delta H_{\text{billes}} + \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{calo}} = 0$ .

Chacun des termes est de la forme  $mc\Delta T (= mc\Delta t)$ , la masse des billes étant  $m_{\text{billes}} = n \times V_{\text{1 bille}} \times \rho_{\text{verre}} = n \frac{4}{3} \pi \frac{\delta^3}{8} d\rho_{\text{eau}}$  et le calorimètre étant équivalent à une masse  $m_{\text{eq}}$  d'eau. On obtient donc :  $n \frac{4}{3} \pi \frac{\delta^3}{8} d\rho_{\text{eau}} c_{\text{verre}} (t_{\text{eq}} - t_1) + (M + m_{\text{eq}}) c_{\text{eau}} (t_{\text{eq}} - t_2) = 0$  d'où

$$c_{\text{verre}} = c_{\text{eau}} \frac{6(M + m_{\text{eq}})(t_{\text{eq}} - t_2)}{n\pi\delta^3 d\rho_{\text{eau}} (t_1 - t_{\text{eq}})}. \text{ AN } \boxed{c_{\text{verre}} = 0,87 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}}. \text{ (On pourrait même se contenter d'un seul chiffre significatif.)}$$

**B1.c)** Identité thermodynamique fondamentale :  $dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$  soit pour une phase condensée :  $\boxed{dS = C \frac{dT}{T}}$ .

**B1.d)**  $\Delta S_{\text{totale}} = \Delta S_{\text{billes}} + \Delta S_{\text{eau}} + \Delta S_{\text{calo}}$  soit  $\boxed{\Delta S_{\text{totale}} = n\pi \frac{\delta^3}{6} d\rho_{\text{eau}} c_{\text{verre}} \ln \frac{T_{\text{eq}}}{T_1} + (M + m_{\text{eq}}) c_{\text{eau}} \ln \frac{T_{\text{eq}}}{T_2}}$ . AN  $\boxed{\Delta S_{\text{totale}} = +0,77 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$ .

Or le second principe pour ce système s'écrit :  $\Delta S_{\text{totale}} = \delta_{\text{échangée}} + \delta_{\text{créée}}$  avec  $\delta_{\text{échangée}} = 0$  puisque la transformation est adiabatique. Il y a donc eu une création d'entropie ( $\delta_{\text{créée}} > 0$ ) ce qui caractérise une transformation irréversible.

**B2.a)** Si on suppose que toute la puissance électrique  $P_{\text{élec}} = RI^2$  reçue par le radiateur est convertie en puissance thermique transférée à la pièce, alors  $P_j = P_{\text{élec}} = RI^2$  soit  $\boxed{P_j = \frac{U^2}{R}}$ .

**B2.b)** Lorsque  $T > T_0$ , le transfert thermique *effectif* des fuites se produit de la pièce vers l'extérieur, donc la puissance thermique *algébriquement reçue* par la pièce est négative. L'expression pour les fuites est donc  $P_{\text{th}} = -kS(T - T_0)$ . La puissance thermique totale algébriquement reçue par la pièce est donc  $\boxed{P_{\text{th,pièce}} = P_j + P_{\text{th}} = \frac{U^2}{R} - kS(T - T_0)}$ .

**B2.c)** On applique le premier principe à l'ensemble de la pièce, entre les instants  $t$  et  $t+dt$  :  $dH = \delta Q = P_{\text{th,pièce}} dt$ . Or en régime permanent (stationnaire),  $dH = 0$  donc  $P_{\text{th,pièce}} = 0$ , d'où  $\boxed{R = \frac{U^2}{kS(T_1 - T_0)}}$ . AN  $\boxed{R = 430 \Omega}$ .

**B2.d)** En régime variable :  $C dT = \frac{U^2}{R} dt - kS(T - T_0) dt$  d'où l'équation différentielle  $\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{kS}{C} T = \frac{U^2}{RC} + \frac{kS}{C} T_0}$ .

**B2.e)** Constante de temps (ou temps de relaxation) :  $\tau = \frac{C}{kS}$ . AN  $\boxed{\tau = 1,8 \cdot 10^4 \text{ s} = 5 \text{ h}}$ . C'est l'ordre de grandeur du temps d'évolution de la température de la pièce du fait des fuites thermiques.

**B2.f)** Solution générale :  $T(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{\text{lim}}$  avec  $\boxed{T_{\text{lim}} = T_0 + \frac{U^2}{RkS}}$ . Avec la CI  $T(0) = A + T_{\text{lim}}$  on obtient :

$$\boxed{T(t) = (T(0) - T_{\text{lim}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_{\text{lim}}}$$

**B2.g)** On peut diminuer les pertes thermiques en améliorant l'isolation thermique des murs (changement de matériaux, ajout d'une couche) ou des fenêtres (double vitrage).

### ▣ Problème C

**C1.** Loi de Fick :  $\overline{j_D} = -D \overline{\text{grad}(n)}$ . Dans le cas présent, elle s'écrit :  $\boxed{\overline{j_D} = -D \frac{\partial n}{\partial x} e_x}$ .

Cette loi ne s'appuie pas sur des principes fondamentaux, mais décrit correctement la plupart des observations expérimentales : une substance diffuse des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées, car la probabilité de mouvement des particules est plus grande dans ce sens. Ainsi le flux est de sens opposé au gradient de concentration.

**C2.** Bilan de population de particules dans une tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , entre les instants  $t$  et  $t+dt$  :

$$dN(t+dt) - dN(t) = +\delta N_{\text{entrant en } x} - \delta N_{\text{sortant en } x+dx} \Leftrightarrow [n(x, t+dt) - n(x, t)] S dx = + \underbrace{\left( \iint_S j_D(x, t) \overline{e_x} \cdot \overline{e_x} ds \right)}_{j_D(x, t) S} dt - \underbrace{\left( \iint_S j_D(x+dx, t) \overline{e_x} \cdot \overline{e_x} ds \right)}_{j_D(x+dx, t) S} dt$$

d'où en divisant par  $S dx dt$  :  $\frac{n(x, t+dt) - n(x, t)}{dt} = \frac{j_D(x, t) S dt - j_D(x+dx, t) S dt}{dx}$  soit  $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_D}{\partial x}$ .

On injecte la loi de Fick  $j_D = -D \frac{\partial n}{\partial x}$ , et on obtient :  $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$ .

**C3.**  $\frac{\partial n}{\partial t} \sim \frac{n}{\tau}$  et  $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \sim \frac{n}{L^2}$  donc  $\frac{n}{\tau} \sim D \frac{n}{L^2}$  soit  $\boxed{L \sim \sqrt{D\tau}}$ .

**C4.** Si  $D$  dépend de  $n$ , donc de  $x$  et de  $t$ , on ne peut pas sortir  $D$  de la dérivée :  $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial n}{\partial x} \right)}$  soit  $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial x} \times \frac{\partial n}{\partial x} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$  ou

encore  $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial n} \times \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ . Une telle équation nécessite généralement une méthode de résolution numérique.

C5. On dérive  $N$ :  $\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{K}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) + \frac{K}{\sqrt{t}} \frac{ax^2}{t^2} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) = K \left[ -\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{ax^2}{t^{5/2}} \right] \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$ ;  $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{K}{\sqrt{t}} \frac{2ax}{t} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) = -\frac{2Kax}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$  puis  $\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = -\frac{2Ka}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) - \frac{2Kax}{t^{3/2}} \times \left(-\frac{2ax}{t}\right) \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) = K \left[ -\frac{2a}{t^{3/2}} + \frac{4a^2x^2}{t^{5/2}} \right] \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$ .

On injecte ces dérivées dans l'équation différentielle :  $K \left[ -\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{ax^2}{t^{5/2}} \right] \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) = DK \left[ -\frac{2a}{t^{3/2}} + \frac{4a^2x^2}{t^{5/2}} \right] \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$  soit après

simplification :  $-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{ax^2}{t^{5/2}} = -\frac{2Da}{t^{3/2}} + \frac{4Da^2x^2}{t^{5/2}}$ . On peut effectivement identifier terme à terme en posant  $a = \frac{1}{4D}$ .

Nombre total d'atomes dans un cylindre infini d'axe ( $Ox$ ) et de section  $S$  :

$$N_0 S = \iiint_{\text{cylindre}} N(x,t) dx dy dz = S \int_{x=0}^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx = SK 2\sqrt{D} \int_{u=0}^{+\infty} \exp(-u^2) du = SK\sqrt{D}\sqrt{\pi} \text{ donc } K = \frac{N_0}{\sqrt{\pi D}}$$

C6. La concentration est toujours maximale à l'endroit de l'implantation ( $x = 0$ ), mais elle diminue au fur et à mesure que les atomes diffusent dans la plaquette. La concentration tend à devenir homogène dans l'ensemble de la plaquette.

L'aire sous chaque courbe est l'intégrale  $\int_{x=0}^{+\infty} N(x,t) dx$ , c'est-à-dire celle calculée ci-dessus sans le facteur  $S$ , soit  $N_0$ .

On lit à  $t = 1 \text{ h}$  :  $L = 0,7 \mu\text{m}$ .

C7. La distance  $L$  peut aussi se calculer théoriquement :  $N(L,t) = \frac{N(0,t)}{2} \Leftrightarrow \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{L^2}{4Dt}\right) = \frac{K}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{L^2}{4Dt}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{L^2}{4Dt} = -\ln 2 \Leftrightarrow L = 2\sqrt{D \ln 2 \times t}. \text{ On en déduit alors } D = \frac{L^2}{4t \ln 2}. \text{ AN } D = 5 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$