Th3 – Corrigé des exercices 1 à 4

¤ Exercice 1

a) La température ne dépend que de r, donc $\boxed{\overrightarrow{j_Q} = j_{Q,r}\overrightarrow{e_r} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r}}$ (loi de Fourier).

b) Bilan en régime permanent (ou stationnaire) : $0 = -\Phi_{\text{th,sortant}}\,\mathrm{d}t + p_{\text{v}}V\,\mathrm{d}t = -\left(\iint_{\text{cylindre}} j_{Qr}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t + p_{\text{v}}\pi r^2 L\,\mathrm{d}t$

$= -j_{Qr}2\pi rL\,\mathrm{d}t + p_{\text{v}}\pi r^2 L\,\mathrm{d}t$ d'où $j_{Qr} = \dfrac{p_{\text{v}}r}{2}$. Sachant que $j_{Qr} = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$, il vient $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{p_{\text{v}}r}{2\lambda}}$.

c) Solution : $T(r) = -\dfrac{p_{\text{v}}r^2}{4\lambda} + A$. Condition aux limites : $T(R) = -\dfrac{p_{\text{v}}R^2}{4\lambda} + A = T_{\text{e}}$ d'où $A = T_{\text{e}} + \dfrac{p_{\text{v}}R^2}{4\lambda}$ et $\boxed{T(r) = T_{\text{e}} + \dfrac{p_{\text{v}}(R^2 - r^2)}{4\lambda}}$.

d) Équation de la chaleur générale : $\rho c\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda\Delta T + p_{\text{v}}$. En régime stationnaire : $\Delta T = -\dfrac{p_{\text{v}}}{\lambda}$. On utilise la formule du laplacien en cylindriques, sachant que T ne dépend que de r : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\dfrac{p_{\text{v}}}{\lambda} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\dfrac{p_{\text{v}}}{\lambda}r$. On intègre une première fois : $r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{p_{\text{v}}}{2\lambda}r^2 + A$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{p_{\text{v}}}{2\lambda}r + \dfrac{A}{r}$. Nécessairement $A = 0$ car $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ ne peut pas diverger en $r = 0$ (sur l'axe), sinon la densité de flux serait infinie (d'après la loi de Fourier).

On intègre une deuxième fois : $T(r) = -\dfrac{p_{\text{v}}}{4\lambda}r^2 + B$. Et on obtient alors B comme à la question c.

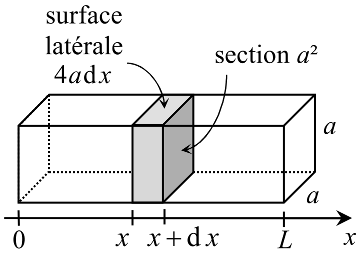
e) $\boxed{T_{\max} = T(0) = T_{\text{e}} + \dfrac{p_{\text{v}}}{4\lambda}R^2}$. AN $\boxed{T_{\max} = 1260\ \text{K}}$: c'est largement inférieur à $T_{\text{f}} = 3140\ \text{K}$ donc il n'y a pas de risque de fusion.

¤ Exercice 2

a) L'unité SI de φ est le $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et celle de T est le K, donc h s'exprime en $\boxed{\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}}$.

b) Premier principe pour une tranche du barreau entre x et $x + \mathrm{d}x$, entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}U(t) = +\underset{\text{en } x}{\delta Q_{\text{entrant}}} - \underset{\text{en } x+\mathrm{d}x}{\delta Q_{\text{sortant}}} + \underset{\text{latéralement}}{\delta Q_{\text{échangé}}}$$



soit $\rho a^2\mathrm{d}x\,c[T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)] = +j_{Q,x}(x,t)a^2\,\mathrm{d}t - j_{Q,x}(x+\mathrm{d}x,t)a^2\,\mathrm{d}t - h[T(x,t) - T_0]4a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

d'où en divisant tout par $a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$: $\rho ca\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -a\dfrac{\partial j_{Q,x}(x,t)}{\partial x} - 4h\left[T(x,t) - T_0\right]$. Avec la loi de Fourier $j_{Q,x}(x,t) = -\lambda\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}$ on obtient : $\boxed{\rho ca\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\lambda\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - 4h\left[T(x,t) - T_0\right]}$.

c) En régime stationnaire, l'équation devient : $a\lambda\dfrac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2} - 4h\left[T(x) - T_0\right] = 0$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{1}{\delta^2}T(x) = -\dfrac{1}{\delta^2}T_0$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{4h}{a\lambda}}$.

Solution générale : $\boxed{T(x) = T_0 + A\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right) + B\exp\left(+\dfrac{x}{\delta}\right)}$. Conditions aux limites : $T(0) = T_1 = T_0 + A + B$ d'où $B = T_1 - T_0 - A$;

$T(L) = T_2 = T_0 + A\exp\left(-\dfrac{L}{\delta}\right) + (T_1 - T_0 - A)\exp\left(+\dfrac{L}{\delta}\right)$ d'où $A = \dfrac{(T_1 - T_0)\exp\left(+L/\delta\right) - T_2 + T_0}{2\,\text{sh}\left(L/\delta\right)}$ et $B = \dfrac{-(T_1 - T_0)\exp\left(-L/\delta\right) + T_2 - T_0}{2\,\text{sh}\left(L/\delta\right)}$.

Pour une très grande longueur L, plus précisément pour $L \gg \delta$: $\exp\left(-L/\delta\right) \ll 1 \ll \exp\left(+L/\delta\right)$ donc $2\,\text{sh}\left(L/\delta\right) \approx \exp\left(+L/\delta\right)$, d'où les coefficients $A \approx T_1 - T_0$ et $B \approx 0$ (c'est-à-dire $B \ll A$) ; on obtient alors $\boxed{T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)}$.

¤ Exercice 3

a) Ces deux résistances sont placées entre les deux mêmes systèmes (l'intérieur de la maison à la température θ et l'extérieur à la température θ_{e}) : elles sont donc <u>en parallèle</u>.

b) Premier principe pour la maison pendant une durée Δt, en régime permanent (isobare) : $\Delta H = Q_{\text{chauffage}} + Q_{\text{fuites}}$

$\Leftrightarrow 0 = +\mathcal{P}\Delta t - \dfrac{\theta - \theta_{\text{e}}}{R_{\text{th,éq}}}\Delta t = +\mathcal{P}\Delta t - (\theta - \theta_{\text{e}})\left(\dfrac{1}{R_{\text{th},1}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},2}}\right)\Delta t$ d'où $\boxed{\mathcal{P} = (\theta - \theta_{\text{e}})\left(\dfrac{1}{R_{\text{th},1}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},2}}\right)}$. AN $\boxed{\mathcal{P} = 6{,}0\ \text{kW}}$.

c) On ajoute cette fois une nouvelle résistance $R_{\text{th},3}$ en série avec celle du toit, le calcul précédent devient donc :

$\mathcal{P}' = (\theta - \theta_{\text{e}})\left(\dfrac{1}{R_{\text{th},1}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},2} + R_{\text{th},3}}\right)$. Or $R_{\text{th},3} = \dfrac{e}{\lambda S} = 1{,}8\cdot10^{-2}\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}$, d'où on calcule $\mathcal{P}' = 1{,}5\ \text{kW}$. On a donc <u>économisé 75 %</u> de la puissance de chauffage.

¤ **Exercice 4**

a) Équation de diffusion unidimensionnelle, sans terme de « source » : $\boxed{\rho c \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}}$ (voir cours).

b) On injecte la solution proposée $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{b}(x)\exp(j\omega t)$ dans l'équation aux dérivées partielles :

$\rho c j\omega \underline{b}(x)\exp(j\omega t) = \lambda \dfrac{\mathrm{d}^2 \underline{b}(x)}{\mathrm{d}x^2}\exp(j\omega t)$ soit après simplification $\dfrac{\mathrm{d}^2 \underline{b}(x)}{\mathrm{d}x^2} - j\dfrac{\rho c\omega}{\lambda}\underline{b}(x) = 0$. Équation caractéristique : $\underline{r}^2 - j\dfrac{\rho c\omega}{\lambda} = 0$

soit $\underline{r}^2 = 2j\dfrac{\rho c\omega}{2\lambda} = \dfrac{(1+j)^2}{\delta^2}$ donc $\underline{r} = \pm\dfrac{1+j}{\delta}$. La solution générale est donc de la forme :

$$\underline{b}(x) = a\exp\left(-(1+j)\frac{x}{\delta}\right) + c\exp\left(+(1+j)\frac{x}{\delta}\right) = a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right) + c\exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(+j\frac{x}{\delta}\right).$$

Or le milieu est semi-infini vers les *x* croissants, le second terme divergerait, ce qui est impossible, donc $c = 0$. Il reste finalement :

$$\boxed{\underline{b}(x) = a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right)}.$$

c) Donc $\underline{T}(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\dfrac{x}{\delta}\right)\exp(j\omega t) = T_0 + a\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)\exp\left(j\left(\omega t - \dfrac{x}{\delta}\right)\right)$. On en prend la partie réelle pour obtenir

$$\boxed{T(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}.$$

d) On nous donne $\theta_0 = 3\ °\mathrm{C}$, soit $T_0 = 276\ \mathrm{K}$, et $a = 15\ °\mathrm{C} = 15\ \mathrm{K}$. À une profondeur $x = 50\ \mathrm{cm}$, l'amplitude des variations, toujours autour de T_0, est $a\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right) = 0{,}49\ °\mathrm{C} = 0{,}49\ \mathrm{K}$, donc la température varie entre 2,5 °C et 3,5 °C : <u>il ne gèle pas</u>.
