

# Exercices du chapitre Mc1

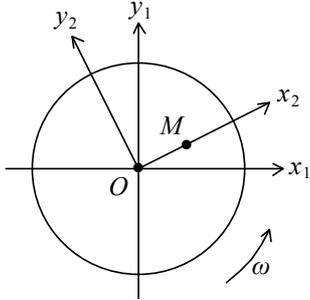
## Cinématique du changement de référentiel

### 1. Mouvement radial sur un plateau tournant

Un plateau horizontal tourne avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante, autour d'un axe vertical ( $Oz_1$ ) fixe par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_1$ . On notera  $\mathcal{R}_2$  le référentiel lié au plateau ; les axes ( $Oz_1$ ) et ( $Oz_2$ ) sont confondus.

Une petite fourmi  $M$  décrit à vitesse constante  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2} = v\vec{e}_{x_2}$

l'axe ( $Ox_2$ ) du référentiel  $\mathcal{R}_2$ . Exprimer  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_1}$  et  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_1}$  dans la base  $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2})$ .

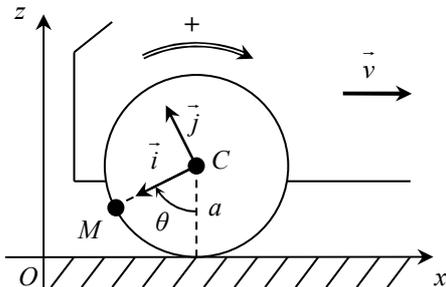


### 2. Mouvement d'un caillou sur un pneu

Madame Michu roule en voiture sur une route rectiligne, selon l'axe ( $Ox$ ) et vers les  $x$  croissants, à une vitesse  $v$  constante.

On note  $\mathcal{R}$  le référentiel terrestre lié au repère  $Oxyz$ .

À un instant  $t = 0$ , elle roule sur un caillou  $M$  qui se trouvait au point  $O$ , et ce caillou se coince alors dans le pneu de l'une des roues, de centre  $C$  et de rayon extérieur  $a$ . On cherche à déterminer la trajectoire de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ . Pour cela, on introduit un second référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la voiture, donc au repère  $Cxyz$ .



a) La roue roulant sans glisser sur la route, de quelle distance  $dx$  avance la voiture sur le sol lorsque la roue tourne d'un angle  $d\theta$ ? En déduire la relation entre  $v$  et  $\dot{\theta}$ .

b) Déterminer l'angle  $\theta(t)$  entre la verticale descendante et le rayon  $[CM]$ , en prenant  $\theta(0)=0$ .

c) Quel est le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ? Quel est le mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$ ?

d) Déterminer, avec les lois de composition, les vecteurs vitesse et accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  en fonction du temps. On pourra utiliser comme intermédiaire la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_y)$  telle que  $\vec{CM} = a\vec{i}$ .

e) Déterminer les équations paramétriques  $x(t)$  et  $z(t)$  de la trajectoire de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ . Représenter cette trajectoire sur un schéma (cette courbe s'appelle une cycloïde).

f) Après quelques tours, le caillou se détache de la roue : part-il vers l'avant ou vers l'arrière (par rapport au sol)?

## Dynamique en référentiel non galiléen

### 3. Toto en impesanteur

Le petit Toto se trouve dans un ascenseur de masse  $M$ , avec une balle de masse  $m$  dans la main. Soudain, les câbles de l'ascenseur se rompent, et il se retrouve en chute libre (par rapport au référentiel terrestre) : Toto lâche alors la balle.

a) On suppose tout d'abord que cette chute libre de l'ascenseur a lieu sans frottements. Quelle est son accélération? Déterminer alors la somme des forces exercées sur la balle dans le référentiel de l'ascenseur.

b) En réalité il y a des frottements entre l'ascenseur et l'extérieur. Comment se modifient alors les résultats précédents?

### 4. Pendule en référentiel non galiléen

Un pendule simple (fil idéal inextensible de longueur  $\ell$  et point matériel  $M$  de masse  $m$ ) est fixé au plafond d'un véhicule, en un point  $O$  (origine du repère).

a) Le véhicule est en translation rectiligne horizontale, d'accélération constante  $a$ , par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) : le pendule est alors en équilibre par rapport au véhicule, le fil faisant un angle  $\beta$  avec la verticale. Déterminer  $\beta$ , en appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au véhicule.

b) Le véhicule est maintenant un manège en rotation uniforme, avec la vitesse angulaire  $\omega$ , autour de l'axe vertical ( $Oz$ ) fixe (par rapport au référentiel terrestre toujours). Le pendule est alors à nouveau en équilibre par rapport au véhicule, avec un angle  $\beta$  par rapport à la verticale. Déterminer  $\beta$ ; on montrera qu'il existe une vitesse angulaire critique  $\omega_c$  au-dessous de laquelle le fil reste verticale.

c) Dans le cas de la rotation, déterminer l'énergie potentielle totale  $E_p$  du point  $M$  dans le référentiel tournant. En déduire les positions d'équilibre (angle  $\beta$  avec la verticale descendante) en fonction de  $\omega$ , et retrouver le résultat de la question précédente. La position non verticale, lorsqu'elle existe, est-elle stable?

d) On se propose d'étudier maintenant la stabilité de la position verticale ( $\beta = 0$ ). Pour cela, déterminer l'expression approchée de  $E_p$  pour les faibles valeurs de  $\beta$ . Tracer l'allure de la courbe donnant  $E_p$  en fonction de  $\beta$  au voisinage de 0, en distinguant deux cas selon la valeur de  $\omega$ ; en déduire la stabilité de cette position d'équilibre.

e) Résumer les résultats précédents sur un graphique donnant les angles  $\beta$  d'équilibre en fonction de  $\omega$ ; indiquer sur chaque partie de la courbe le caractère stable ou instable.

## Caractère non galiléen du référentiel terrestre

### 5. Déviation vers l'est

Du fait de la rotation de la Terre, un objet en chute libre sans vitesse initiale ne tombe pas exactement à la verticale : cet effet, déjà envisagé par NEWTON en 1679, a été calculé par LAPLACE et par GAUSS en 1803, et étudié expérimentalement à de nombreuses reprises, notamment par Ferdinand REICH en 1831 dans un puits de mine de Freiberg (royaume de Saxe, aujourd'hui en Allemagne).

On considère un projectile de masse  $m$ , assimilé à un point matériel, lâché sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$  au-dessus d'un point  $O$  du sol, situé à une latitude  $\lambda$ . On définit un repère ( $Oxyz$ ) lié à la Terre, avec l'axe ( $Oz$ ) vertical ascendant, ( $Ox$ ) vers l'est et ( $Oy$ ) vers le nord. On tiendra compte de la rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles, caractérisée par le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ .

a) Sur un schéma en coupe de la Terre, faire apparaître ce repère, la position initiale  $M_0$  du projectile et le vecteur  $\vec{\Omega}$ . Vérifier que celui-ci s'écrit :  $\vec{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z)$ .

b) Faire la liste des forces s'exerçant sur le projectile pendant sa chute, en négligeant les frottements de l'air, et écrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$ .

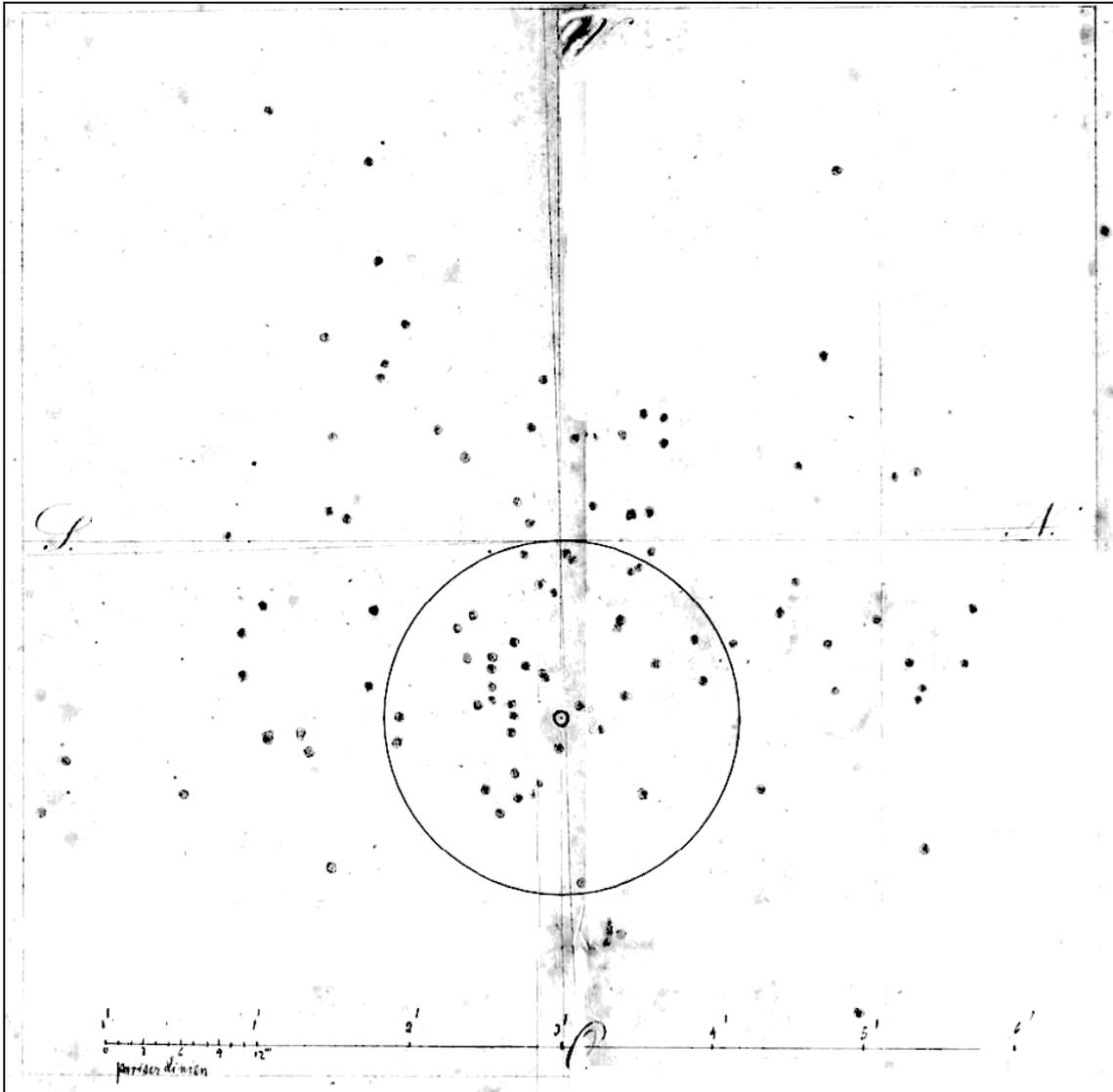
Cette équation vectorielle est difficile à résoudre exactement, on utilise donc la méthode des perturbations, qui consiste à procéder par approximation successives, du fait que la force de CORIOLIS est très faible par rapport au poids.

c) Dans un premier temps (ordre 0), on néglige totalement la force de CORIOLIS. Déterminer le vecteur vitesse du projectile au cours du temps, et préciser son point de chute sur le sol.

d) On fait maintenant le calcul à l'ordre 1 (en  $\Omega$ ), en calculant la force de CORIOLIS avec le vecteur vitesse trouvé à l'ordre 0. Projeter alors le PFD sur les trois axes, en déduire les équations horaires du mouvement, et finalement les coordonnées du point de chute  $A$  du projectile. Dans quelle direction géographique a-t-il été dévié ?

e) Calculer numériquement la distance  $OA$ , en prenant les données de l'expérience de REICH :  $\lambda = 50^\circ 53' N$  ;  $h = 158,5 \text{ m}$  ;  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

f) Lors de son expérience, REICH a effectué 106 lâchers de projectiles, et a repéré à chaque fois le point de chute, ce qui a donné la figure ci-dessous (extraite de son ouvrage original *Fallversuche über die Umdrehung der Erde*, 1832). Le centre de la figure, à l'intersection des deux axes, est le point  $O$ , et le centre du cercle représente la position moyenne des impacts, qui doit donc correspondre au point  $A$ . L'unité de longueur sur l'échelle en bas de la figure est la « ligne parisienne » (*Pariser Linie*), valant 2,2558 mm. Comparer ces résultats avec le calcul théorique.



☞ Réponses partielles

1.  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_1} = v \overline{e_{x2}} + \omega x_2 \overline{e_{y2}}$  ;  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_1} = 2\omega v \overline{e_{y2}} - \omega^2 x_2 \overline{e_{x2}}$ .

2. a)  $v = a\dot{\theta}$ . d)  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = v \left( 1 - \cos \frac{vt}{a} \right) \overline{e_x} + v \sin \frac{vt}{a} \overline{e_z}$  ;

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \frac{v^2}{a} \left( \sin \frac{vt}{a} \overline{e_x} + \cos \frac{vt}{a} \overline{e_z} \right).$$

4. b)  $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ . d)  $E_p \approx \frac{m\ell}{2} (g - \ell\omega^2)\beta^2 + \text{cte}$ .

5. b)  $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_T} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T}$ . d)  $x_A = \frac{2}{3}\Omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2h^3}{g}}$ .