

Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 2**▣ Problème A**

1.1) Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$. \vec{j}_Q est le vecteur densité de flux thermique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$), T la température (en K), λ la conductivité thermique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

1.2) Premier principe pour une tranche entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$: $dU(t + dt) - dU(t) = +\delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}}$

$\Leftrightarrow \rho S dx [T(x, t + dt) - T(x, t)] = +j_Q(x, t) S dt - j_Q(x + dx, t) S dt$ d'où en divisant par $S dx dt$: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}$. La loi de Fourier

s'écrivant ici $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on obtient : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec la diffusivité thermique $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.

1.3) D s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (comme la diffusivité dans les autres phénomènes analogues).

1.4) Le transfert thermique s'effectue de la zone de température plus élevée vers celle de température plus faible, donc ici dans le sens des x croissants.

1.5) En régime permanent (ou stationnaire) : $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ donc $T(x) = Ax + B$. Conditions aux limites : $T(0) = T_1 = B$ et

$T(\ell) = T_2 = A \cdot \ell + T_1$ donc $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1$.

1.6) Par définition : $R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}$ avec $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ le flux thermique (puissance thermique) de 1 vers 2. Unité SI : $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

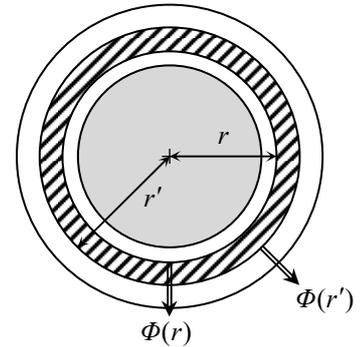
Or $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_S \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_s ds = j_Q S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{\ell} S$ donc $R_{\text{th}} = \frac{\ell}{\lambda S}$. Conductance thermique : $G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{\ell}$.

1.7) Ce système est à symétrie sphérique (invariance par toute rotation autour du centre) donc T ne dépend que de r : $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$.

Puisque T décroît vers l'extérieur (de T_i à T_e), \vec{j}_Q est dirigé selon un rayon de la sphère et orienté vers l'extérieur.

1.8) $\Phi(r) = \oiint_S \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_r ds = -\oiint_S \lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r ds = -\lambda \frac{dT}{dr} \oiint_S ds$ soit $\Phi(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$.

1.9) Effectuons un bilan d'énergie, entre deux instants t et $t + \Delta t$, pour un système constitué d'une portion de plumage comprise entre deux rayons différents quelconques r et r' (le système est hachuré sur le schéma). Puisqu'il n'y a pas de source interne au plumage, les seules causes de variation possible de l'énergie de ce système sont les flux thermiques sur les deux surfaces ; et comme la notation $\Phi(r)$ signifie un flux *sortant* d'une sphère de rayon r , c'est-à-dire orienté vers l'extérieur, on doit compter positivement le flux $\Phi(r)$, qui entre dans le système donc tend à faire augmenter son énergie, et négativement le flux $\Phi(r')$, qui en sort. Ainsi le bilan s'écrit, en régime stationnaire : $0 = +\Phi(r) \Delta t - \Phi(r') \Delta t$, d'où $\Phi(r) = \Phi(r')$, c'est-à-dire que le flux est le même pour tout r ; on le notera donc simplement Φ .



1.10) La résistance thermique du plumage est $R_{\text{th}} = \frac{T_i - T_e}{\Phi}$, sa conductance thermique est $G_{\text{th}} = \frac{\Phi}{T_i - T_e}$.

On intègre la formule trouvée à la question **1.8** : $\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda r^2}$ d'où $T(r) = +\frac{\Phi}{4\pi\lambda r} + C$. Conditions aux limites :

$T(R) = T_i = \frac{\Phi}{4\pi\lambda R} + C$ et $T(R + e) = T_e = \frac{\Phi}{4\pi\lambda (R + e)} + C$. En soustrayant membre à membre on élimine alors la constante inconnue :

$T_i - T_e = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \times \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + e} \right) = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \times \frac{e}{R(R + e)}$ d'où on tire $G_{\text{th}} = 4\pi\lambda \frac{R(R + e)}{e}$. On a donc trouvé le coefficient $\alpha = 4\pi$.

1.11) Si $e \ll R$ on obtient approximativement $G_{\text{th}} = 4\pi\lambda \frac{R^2}{e}$. Or le produit $4\pi R^2$ est la surface de la sphère de rayon R , donc on a bien

obtenu $G_{\text{th}} = \lambda \frac{S}{e}$. (C'est la même formule que pour un conducteur thermique plan.)

2.1) La résistance au froid correspond à la capacité à maintenir constante la température T_i du corps : pour cela le métabolisme de l'animal doit fournir une quantité d'énergie égale à celle qui est perdue par transfert thermique, qui est proportionnelle à G_{th} . Or cette énergie est libérée dans le volume du corps, et on peut estimer qu'elle est grossièrement proportionnelle à la masse de l'animal. Ainsi, $G_m = G_{\text{th}}/m$ donne un rapport entre l'énergie perdue et l'énergie reçue : plus ce paramètre est faible, plus l'animal peut résister au froid.

2.2) En géométrie sphérique, la masse est $m = \rho \times V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$, donc $G_m = \frac{3\lambda(R + e)}{\rho R^2 e}$. Avec l'approximation $e \ll R$: $G_m = \frac{3\lambda}{\rho R e}$.

2.3) Dans la formule ci-dessus pour la masse, on isole R : $R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$. AN $R_1 = 7,8 \text{ cm}$; $R_2 = 1,3 \text{ cm}$.

2.4) L'épaisseur e indiquée n'est pas négligeable devant le rayon corporel de ces oiseaux : on gardera donc la première expression, plus précise, de G_m . Le rapport est alors : $x = \frac{G_{m1}}{G_{m2}} = \frac{3\lambda(R_1 + e)}{\rho R_1^2 e} \frac{\rho R_2^2 e}{3\lambda(R_2 + e)}$ soit $x = \frac{G_{m1}}{G_{m2}} = \frac{R_2^2(R_1 + e)}{R_1^2(R_2 + e)}$. AN $x = 0,11$.

2.5) Dans le modèle sphérique, la surface corporelle est proportionnelle à R^2 (expression exacte $S = 4\pi R^2$). Or nous avons vu ci-dessus que le rayon R est proportionnel à $m^{1/3}$, donc S est proportionnelle à $m^{2/3}$.

2.6) D'après le calcul de la question 2.4, l'oiseau de 2 kg a une capacité de résistance au froid environ neuf fois plus grande que celle de l'oiseau de 10 g, c'est-à-dire qu'il peut supporter un écart de température neuf fois plus élevé.

Plus généralement, lorsque la taille d'un oiseau augmente, sa production de chaleur augmente proportionnellement à m , tandis que ses pertes thermiques augmentent proportionnellement à sa surface corporelle donc seulement à $m^{2/3}$. Ainsi, pour une même épaisseur de plumage, les oiseaux les plus grands sont ceux qui résistent le mieux au froid.

2.7) L'étude précédente ayant été faite à épaisseur de plumage constante, il s'agit maintenant d'examiner cette hypothèse. Pour comparer les épaisseurs de plumage, les données intéressantes sont celles des grandeurs par unité de surface corporelle : nombre de plumes et masse de plumage.

Tout d'abord, pour des oiseaux de plus en plus petits, le nombre de plumes par unité de surface augmente fortement (de 4,6 à 31 par cm^2), donc le plumage est de plus en plus épais : ceci peut compenser l'effet de la taille étudié précédemment.

Par ailleurs, pour des oiseaux de plus en plus petits, la masse de plumes par unité de surface diminue (de 42 à 13 mg par cm^2). On peut en déduire que la nature des plumes change : les petits oiseaux ont des plumes plus légères, plutôt sous forme de duvet, c'est-à-dire qu'elles enferment beaucoup d'air, ce qui contribue aussi à une meilleure isolation thermique (l'air étant un mauvais conducteur thermique : c'est aussi le principe à la base des doubles vitrages).

▣ Problème B

1. E_p est définie par : $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OP} = -\frac{2U}{a} \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi) = -\frac{2U}{a} \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a^2}{r^2} \right) dr$. On intègre :

$$E_p(r) = U \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \right) + \text{cte}. \text{ Si on choisit } E_p(\infty) = 0, \text{ la constante est nulle, soit } E_p(r) = U \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \right).$$

2. Théorème du moment cinétique pour P , en O dans \mathcal{R} terrestre galiléen : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{F} // \vec{OP}$, donc $\vec{L} = \text{cte}$. À

$t = 0$: $\vec{L} = m \vec{OP}_0 \wedge \vec{v}_0 = -m a \vec{e}_x \wedge v_0 \vec{e}_y$ soit $\vec{L} = -m a v_0 \vec{e}_z$. Or $\vec{L} = m \vec{OP} \wedge \vec{v}(P)_{\mathcal{R}} \perp \vec{OP}$ donc $\vec{OP} \perp \vec{e}_z, \forall t$: le mouvement de P a lieu dans le plan (Oxy) . Alors en coordonnées polaires : $\vec{L} = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$ soit $\vec{L} = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ (donc $r^2 \dot{\theta} = -a v_0$).

3. La seule force exercée sur P est conservative, donc son énergie mécanique E est constante.

Expression générale : $E = \frac{1}{2} m v^2 + U \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \right)$. À $t = 0$: $E = \frac{1}{2} m \frac{U}{m} + U \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{2a}{a} \right)$ soit $E = -\frac{U}{2}$.

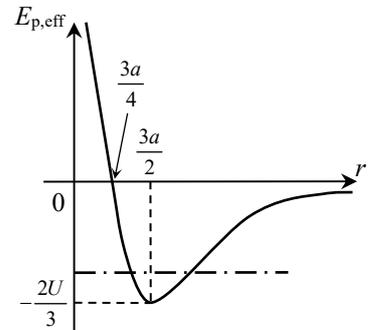
4. $E = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r)$, or $\dot{\theta} = -\frac{a v_0}{r^2}$ donc $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$

avec $E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{a^2 v_0^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \frac{a^2}{r^2} \frac{U}{m} + U \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \right)$ soit $E_{p,\text{eff}}(r) = U \left(\frac{3a^2}{2r^2} - \frac{2a}{r} \right)$

(énergie potentielle effective).

$E_{p,\text{eff}}(0) \rightarrow +\infty, E_{p,\text{eff}}(\infty) \rightarrow 0$. $E_{p,\text{eff}}$ s'annule pour $r = \frac{3a}{4}$, et a un extremum (minimum)

pour $-\frac{3a^2}{r^3} + \frac{2a}{r^2} = 0$ soit $r = \frac{3a}{2}$: alors $E_{p,\text{eff}} = -\frac{2U}{3}$.



5. $E - E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$ donc les valeurs de r accessibles sont celles qui vérifient $E_{p,\text{eff}}(r) \leq E = -\frac{U}{2}$. D'après le graphe, cela correspond à $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, donc la particule ne peut pas aller à l'infini. Les deux valeurs extrêmes sont données par :

$$E_{p,\text{eff}}(r) = -\frac{U}{2} \Leftrightarrow \frac{3a^2}{2r^2} - \frac{2a}{r} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow r^2 - 4ar + 3a^2 = 0, \text{ dont les racines sont } r_{\min} = a \text{ et } r_{\max} = 3a.$$