Mc1 – Corrigé des exercices 2, 3, 4 (fin) et 5

¤ Exercice 2

a) Pendant une durée dt, la distance parcourue dx est égale à la longueur de l'arc de cercle $a\mathrm{d}\theta$ (portion de la roue ayant touché le sol). En divisant par dt on obtient $\boxed{v = a\dot{\theta}}$ (= cte) .

b) On intègre : $\theta(t) = \dfrac{v}{a}t + A$ avec $\theta(0) = A = 0$, soit $\boxed{\theta(t) = \dfrac{v}{a}t}$.

c) $\mathcal{R}'$ est en <u>translation rectiligne uniforme</u> par rapport à $\mathcal{R}$.

Dans $\mathcal{R}'$, M tourne autour du point fixe C à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$: le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ est <u>circulaire uniforme</u>.

d) Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v_\mathrm{e}}(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Le référentiel $\mathcal{R}'$ étant en translation rectiligne dans $\mathcal{R}$: $\vec{v_\mathrm{e}}(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{v}(C)_{\mathcal{R}} = v\,\vec{e_x}$.

D'autre part, pour M en mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}'$: $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = a\dot{\theta}\,\vec{j} = v\,\vec{j}$.

Donc $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = v\left(\vec{e_x} + \vec{j}\right) = v(1-\cos\theta)\vec{e_x} + v\sin\theta\,\vec{e_z}$ soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)\vec{e_x} + v\sin\dfrac{vt}{a}\vec{e_z}}$.

Loi de composition des accélérations : $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{a_\mathrm{e}}(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{a_\mathrm{c}}(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

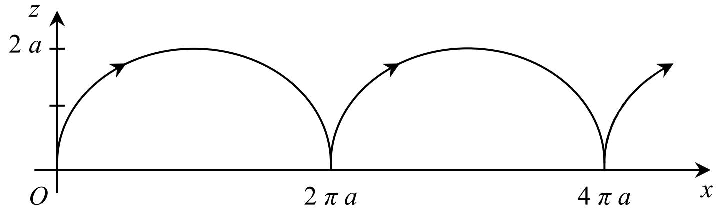
Or $\vec{a_\mathrm{c}}(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ (translation) et $\vec{a_\mathrm{e}}(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{a}(C)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ (mouvement de C rectiligne uniforme). Et l'accélération de M dans $\mathcal{R}'$ est dirigée vers le centre du cercle :

$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} = -a\dot{\theta}^2\vec{i} = -\dfrac{v^2}{a}\vec{i} = -\dfrac{v^2}{a}\left(-\sin\theta\,\vec{e_x} - \cos\theta\,\vec{e_z}\right)$. Donc $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \dfrac{v^2}{a}\left(\sin\dfrac{vt}{a}\vec{e_x} + \cos\dfrac{vt}{a}\vec{e_z}\right)}$.

e) Projections de la vitesse : $\dot{x}(t) = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)$ et $\dot{z}(t) = v\sin\dfrac{vt}{a}$. On intègre par rapport à t : $x(t) = v\left(t - \dfrac{a}{v}\sin\dfrac{vt}{a}\right) + B$ et $z(t) = -v\dfrac{a}{v}\cos\dfrac{vt}{a} + C$. Et avec les conditions initiales $x(0) = z(0) = 0$: $\boxed{x(t) = vt - a\sin\dfrac{vt}{a}}$ et $\boxed{z(t) = a\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)}$.

z oscille entre 0 et $2a$, tandis que x augmente toujours (puisque $\dot{x}(t) \geq 0$).

Lorsque $\dfrac{vt}{a} = 2k\pi$, $x(t) = 2k\pi a$, $z(t) = 0$ et $\dot{x}(t) = \dot{z}(t) = 0$.



f) Lorsque le caillou quitte la roue, sa vitesse initiale a une composante $\dot{x}(t) = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)$ qui ne peut être que positive (ou nulle s'il est sur le sol). Il est ensuite en chute libre en gardant cette vitesse horizontale : <u>le caillou ne peut partir que vers l'avant</u>.

Exercice 3

a) L'ascenseur ne peut se déplacer qu'en translation verticale, on peut donc le traiter comme un point matériel. On lui applique le PFD dans le référentiel terrestre : $M\,\overrightarrow{a_\mathrm{asc}} = M\vec{g}$ d'où $\boxed{\overrightarrow{a_\mathrm{asc}} = \vec{g}}$.

Dans le référentiel de l'ascenseur, en translation rectiligne accélérée donc non galiléen, la balle est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et on y ajoute la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_\mathrm{ie}} = -m\vec{a_\mathrm{e}} = -m\overrightarrow{a_\mathrm{asc}} = -m\vec{g}$ (il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis dans une translation du référentiel). La somme des forces appliquées à la balle est donc $\vec{P} + \overrightarrow{F_\mathrm{ie}} = m\vec{g} - m\vec{g} = \vec{0}$: la balle est <u>pseudo-isolée</u>, la force d'inertie d'entraînement annule le poids de la balle, elle est en <u>impesanteur</u> (appelée également – et maladroitement – *apesanteur*).

Si on lui applique le PFD : $m\vec{a_\mathrm{b}} = \vec{0}$ donc $\vec{v_\mathrm{b}} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$, la balle a un mouvement rectiligne uniforme (ou elle reste immobile si elle l'était initialement).

b) S'il y a des frottements, l'ascenseur va accélérer de moins en moins jusqu'à atteindre une <u>vitesse limite</u> constante : son référentiel <u>redevient alors galiléen</u>. Toto verra donc le poids de la balle réapparaître petit à petit, et finalement la situation revenir à la normale (en attendant d'atteindre le rez-de-chaussée !).

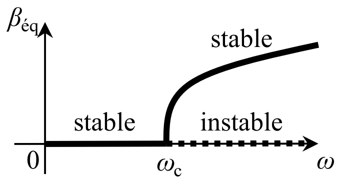
Exercice 4 (fin)

c) On a trouvé : $E_\mathrm{p} = -mg\ell\cos\beta - \dfrac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\beta$ (+cte) d'où $\boxed{\beta_1 = 0}$ (toujours possible) et $\boxed{\beta_2 = \arccos\dfrac{g}{\omega^2\ell}}$ si $\boxed{\omega > \sqrt{\dfrac{g}{\ell}} = \omega_\mathrm{c}}$.

Pour la stabilité de β_2, plutôt que de dériver encore une fois (ce qui donnerait une expression compliquée), on peut regarder le signe de la dérivée première à gauche et à droite de l'extremum. Pour β légèrement inférieur à β_2, $\cos\beta > \cos\beta_2$ donc la parenthèse est négative, et par ailleurs $\sin\beta_2 > 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\beta} < 0$; de même, pour β légèrement supérieur à β_2, $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\beta} > 0$. La fonction est décroissante avant β_2 puis croissante après, β_2 correspond donc à un <u>minimum</u> de E_p, c'est-à-dire à une <u>position d'équilibre stable</u>.

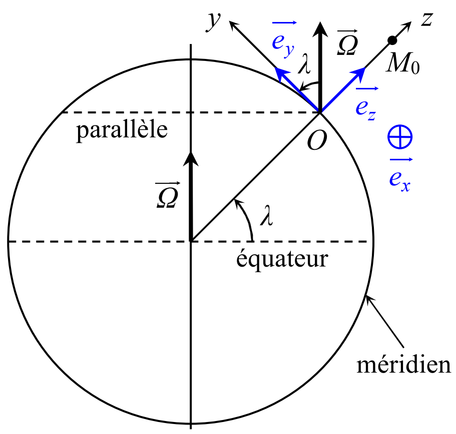
d) Pour $\beta \ll 1$: $\cos\beta \approx 1-\dfrac{\beta^2}{2}$ et $\sin\beta \approx \beta$ donc $E_\text{p} = -mg\ell\left(1-\dfrac{\beta^2}{2}\right)-\dfrac{1}{2}m\omega^2\ell^2\beta^2\ (+\text{cte}) = \dfrac{m\ell}{2}\left(g-\omega^2\ell\right)\beta^2+\text{cte}$. La courbe représentative est un arc de parabole d'axe vertical, d'extremum $\beta_1 = 0$. Si $\omega < \omega_\text{c}$, le coefficient de β^2 est positif, donc la parabole est courbée vers le haut, donc $\beta_1 = 0$ est un minimum (équilibre stable). Si $\omega > \omega_\text{c}$, le coefficient de β^2 est négatif, donc la parabole est courbée vers le bas et $\beta_1 = 0$ est un maximum (équilibre instable).

e) Il y a une « bifurcation » à partir de $\omega = \omega_\text{c}$: la position d'équilibre unique stable devient instable, et une nouvelle position d'équilibre stable apparaît.



Exercice 5

a)



Les projections du vecteur rotation se lisent sur le schéma : il est dans le plan (Oyz) et fait un angle λ avec l'axe (Oy), donc $\vec{\Omega} = \Omega\left(\cos\lambda\,\vec{e_y}+\sin\lambda\,\vec{e_z}\right)$.

b) Le projectile est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$ (qui inclut la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de la Terre), et à la force d'inertie de Coriolis $\vec{F_\text{ic}} = -m\,\vec{a_\text{c}}(M) = -2m\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_\text{T}}$.

Le PFD pour M s'écrit donc : $m\,\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_\text{T}} = m\,\vec{g}-2m\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_\text{T}}$.

c) À l'ordre 0 : $m\,\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_\text{T}} = m\,\vec{g}$. Projections sur la base cartésienne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g = \text{cte} \end{cases} \quad \text{d'où par intégration} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A \\ \dot{y}(t) = B \\ \dot{z}(t) = -gt + C. \end{cases}$$

Condition initiale : vitesse nulle, soit $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ donc $A = B = C = 0$, ce qui donne $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_\text{T}} = -gt\,\vec{e_z}}$.

On intègre à nouveau par rapport au temps : $\begin{cases} x(t) = D \\ y(t) = E \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + F. \end{cases}$

Condition initiale : $x(0) = 0 = D$, $y(0) = 0 = E$ et $z(0) = h = F$. Les équations horaires sont donc finalement :

$x(t) = 0$, $y(t) = 0$ et $z(t) = h-\dfrac{1}{2}gt^2$. Le point M se déplace uniquement sur l'axe (Oz), il tombe donc en O.

d) À l'ordre 1 : $\vec{F_\text{ic}} = -2m\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_\text{T}} = -2m\,\Omega\left(\cos\lambda\,\vec{e_y}+\sin\lambda\,\vec{e_z}\right)\wedge\left(-gt\,\vec{e_z}\right) = -2m\,\Omega\left(-gt\cos\lambda\,\vec{e_x}+\vec{0}\right)$.

Les projections du PFD sont donc maintenant : $\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\,\Omega gt\cos\lambda \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$ soit $\begin{cases} \ddot{x}(t) = 2\Omega gt\cos\lambda \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g = \text{cte}. \end{cases}$

On intègre deux fois, avec toujours les mêmes conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \Omega gt^2\cos\lambda \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}\Omega gt^3\cos\lambda \\ y(t) = 0 \\ z(t) = h-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

Le mobile touche le sol lorsque $z(t) = 0$, donc toujours à l'instant $t_\text{f} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Son point de chute a alors pour coordonnées

$\boxed{x(t_\text{f}) = \dfrac{1}{3}\Omega g t_\text{f}^3\cos\lambda = \dfrac{2}{3}\Omega\cos\lambda\sqrt{\dfrac{2h^3}{g}}}$ et $\boxed{y(t_\text{f}) = 0}$: puisque $x(t_\text{f}) > 0$, il a été dévié vers l'est.

e) AN $\boxed{OA = x(t_\text{f}) = 27{,}6\ \text{mm}}$.

f) Le centre du cercle, correspondant au point A, est bien situé sur l'axe est-ouest (O-W), du côté est (*Ost* en allemand).
On mesure 2,42 cm sur l'image, sachant que 2,05 cm correspond à 12 unités de 2,2558 mm, la déviation moyenne mesurée vaut donc 32,0 mm, ce qui est du même ordre que de la valeur théorique, avec 16 % d'écart. En fait l'article de 1831 indique dans sa conclusion une valeur moyenne de 28,396 mm (le cercle de l'image n'est peut-être pas de Reich lui-même ?), ce qui est encore plus proche de la valeur théorique.