

Exercices du chapitre Mc2

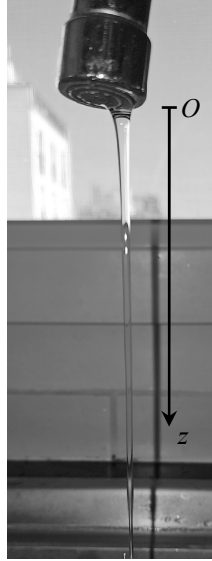
Description eulérienne ou lagrangienne

1. Filet d'eau du robinet

Un mince filet d'eau s'écoule d'un robinet, en régime stationnaire.

- Pourquoi s'amincit-il vers le bas ?
- D'un point de vue lagrangien, chaque particule fluide peut être considérée comme un point matériel en chute libre, avec l'accélération $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = g \vec{e}_z$. Retrouver l'expression classique de sa vitesse en fonction du temps, puis en fonction de z , avec une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_z$ en $z = 0$ (sortie du robinet).

c) Le champ eulérien des vitesses est $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \sqrt{v_0^2 + 2gz} \vec{e}_z$. Vérifier que le champ des accélérations, obtenu par la dérivée particulaire, s'identifie à l'accélération lagrangienne.



2. Écoulement radial de Hubble

Un fluide occupe initialement, de façon homogène (masse volumique $\rho(0)$ uniforme), l'intérieur d'une sphère de rayon r_0 et de centre O . À l'instant $t = 0$, on communique à chaque particule du fluide une vitesse initiale radiale $\vec{v}_{\text{ini}} = \frac{r_{\text{ini}}}{\tau} \vec{e}_r$, où

r_{ini} est sa distance au point O et τ une constante. Ensuite chaque particule conserve cette vitesse au cours du temps.

- En utilisant un point de vue lagrangien, donner la valeur de l'accélération d'une particule de fluide à un instant quelconque $t > 0$.
- Déterminer le champ eulérien des vitesses en fonction des variables r et t .
- L'écoulement est-il incompressible ? Justifier qualitativement puis mathématiquement.
- Déterminer le champ eulérien des accélérations, et comparer au résultat de la question a.
- Déterminer la masse volumique $\rho(t)$, uniforme, en fonction du temps, de $\rho(0)$ et de la constante τ , en exprimant la conservation de la masse totale du fluide.
- Retrouver l'expression de $\rho(t)$ en résolvant l'équation locale de conservation de la masse. On donne la formule :

$$\text{div}(\vec{A}_r \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \text{ en coordonnées sphériques.}$$

Champ de vitesse et débit

3. Écoulement de Poiseuille plan

Un fluide s'écoule dans la direction de l'axe (Ox), entre deux plaques planes parallèles au plan (Oxy), situées aux cotes $z = 0$ et $z = h$. L'expression de son champ des vitesses est :

$$\vec{v}(M) = v_{\text{max}} \left(\frac{4z}{h} - \frac{4z^2}{h^2} \right) \vec{e}_x.$$

- Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?
- Sur un schéma en coupe dans le plan (Oxz), représenter les deux plaques planes, ainsi que les vecteurs vitesses de cinq points de même abscisse x et de cotes respectives $z = 0$, $z = h/4$, $z = h/2$, $z = 3h/4$ et $z = h$. Ajouter en pointillé le profil des vitesses (ligne joignant les extrémités de tous les vecteurs vitesses des points d'abscisse x).
- Schématiser une particule fluide « cubique » à un instant t , en dessinant quatre points en carré (par exemple deux de cote $z = h/4$ et deux de cote $z = h/2$) et leurs vecteurs vitesses.

Dessiner ce que devient la particule fluide à un instant $t + dt$,

et en déduire si l'écoulement semble incompressible, et s'il semble irrotationnel. Vérifier ces deux propriétés par le calcul.

d) Calculer le débit volumique D_V à travers une section rectangulaire de hauteur h et de largeur a . En déduire la vitesse débitante $v_d = D_V / ah$ (vitesse moyenne sur la section).

Champs de vitesse, lignes de courant et trajectoires

4. Champ de vitesse oscillant

Le mouvement d'un fluide est décrit par le champ de vitesse $\vec{v}(M, t) = v_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x + v_0 \vec{e}_y$ dans tout l'espace.

- Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?
- Déterminer sans calcul la nature géométrique des lignes de courant (aspect eulérien), et les représenter aux trois instants suivants : $t = 0$, $t = \pi/2\omega$, $t = \pi/\omega$.
- Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ d'une particule fluide se déplaçant dans le plan (Oxy). En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire (aspect lagrangien), et dessiner les trajectoires de plusieurs particules fluides.
- En un point M à l'instant t , quelle est la relation géométrique entre la ligne de courant passant par M et la trajectoire de la particule se trouvant en M ?

5. Écoulement près de murs plans

On étudie un écoulement de fluide caractérisé par le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = \omega_0 y \vec{e}_x + \omega_0 x \vec{e}_y$.

- Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?
- Cet écoulement est-il incompressible ? Justifier.
- Montrer que l'écoulement est irrotationnel, et déterminer son potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$.
- Déterminer le champ des accélérations.
- Déterminer l'équation cartésienne d'une ligne de courant (aspect eulérien) dans le plan (Oxy), à partir de sa définition :

$$d\vec{OM} // \vec{v} \text{ soit } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}.$$

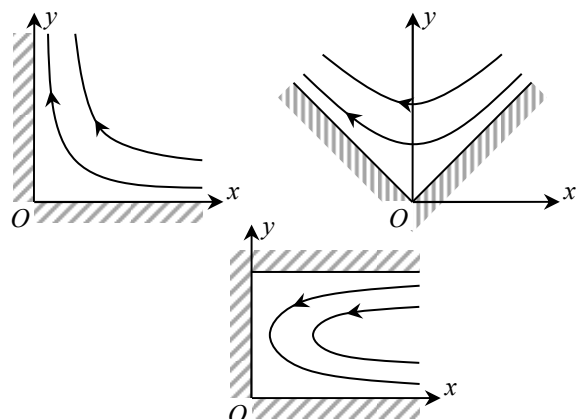
- Déterminer les équations différentielles couplées vérifiées par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ d'une particule fluide se déplaçant dans le plan (Oxy).

En déduire deux équations différentielles séparées pour les fonctions $u(t) = x(t) + y(t)$ et $v(t) = x(t) - y(t)$, résoudre celles-ci en prenant pour position initiale $M_0(x_0, y_0)$, et en déduire finalement les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

- Calculer l'accélération d'une particule et comparer au résultat de la question d.

- En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire d'une particule (aspect lagrangien). Vérifier que les trajectoires et les lignes de courant sont confondues.

- Parmi les dispositions de parois représentées ci-dessous, laquelle est compatible avec le champ de vitesse étudié ?



6. Mouvement d'un cylindre dans un fluide

Un cylindre de rayon a , de génératrices parallèles à (Oz) , se déplace à la vitesse constante $\vec{V}_0 = -V_0 \vec{e}_x$ dans un fluide initialement au repos dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, lié au repère $(Oxyz)$. On note $\mathcal{R}'$ le référentiel en translation avec le cylindre, lié au repère $(O'xyz)$. À $t = 0$, O et O' sont confondus. Le champ des vitesses dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est :

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = +V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \vec{e}_r - V_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

dans une base cylindrique d'axe $(O'z)$.

- Faire un schéma en coupe dans le plan (Oxy) .
- Vérifier que les vitesses en $r = a$ et en $r \rightarrow \infty$ sont conformes aux conditions aux limites.
- Calculer les vitesses pour $r = a$ et les angles suivants : $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$.
- Déterminer le champ des vitesses dans $\mathcal{R}$.
- L'écoulement est-il stationnaire dans $\mathcal{R}'$? dans $\mathcal{R}$?
- Représenter l'allure des lignes de courant dans $\mathcal{R}'$.
- Montrer que les lignes de courant dans $\mathcal{R}$ sont des cercles.

☞ Réponses partielles

2. b) $\vec{v}(M, t) = \frac{r}{t + \tau} \vec{e}_r$.

e) $\rho(t) = \frac{\rho(0)}{(1 + t/\tau)^3}$.

3. d) $D_V = \frac{2}{3} v_{\max} a h$.

4. b) Ce sont des droites (à préciser).

5. d) $\vec{a} = \omega_0^2 x \vec{e}_x + \omega_0^2 y \vec{e}_y$.

e) L'équation est de la forme $y^2 - x^2 = \text{cte}$.

f) $\frac{du}{dt} = \omega_0 u$ et $\frac{dv}{dt} = -\omega_0 v$. On obtient finalement $x(t) = x_0 \text{ch}(\omega_0 t) + y_0 \text{sh}(\omega_0 t)$

et $y(t) = x_0 \text{sh}(\omega_0 t) + y_0 \text{ch}(\omega_0 t)$.

6. b) En $r = a$: $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = -2V_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$, qui est bien tangente au cylindre.

g) Équation d'une ligne de courant : $r = 2b \sin \theta$.