

## **1. Forces dans un fluide en mouvement**

- a) Forces à distance
- b) Forces de pression
- c) Forces de viscosité

## **2. Nombre de Reynolds**

- a) Expérience de Reynolds
- b) Généralisation

### **c) Force de traînée sur une sphère**

- Formule générale de la traînée

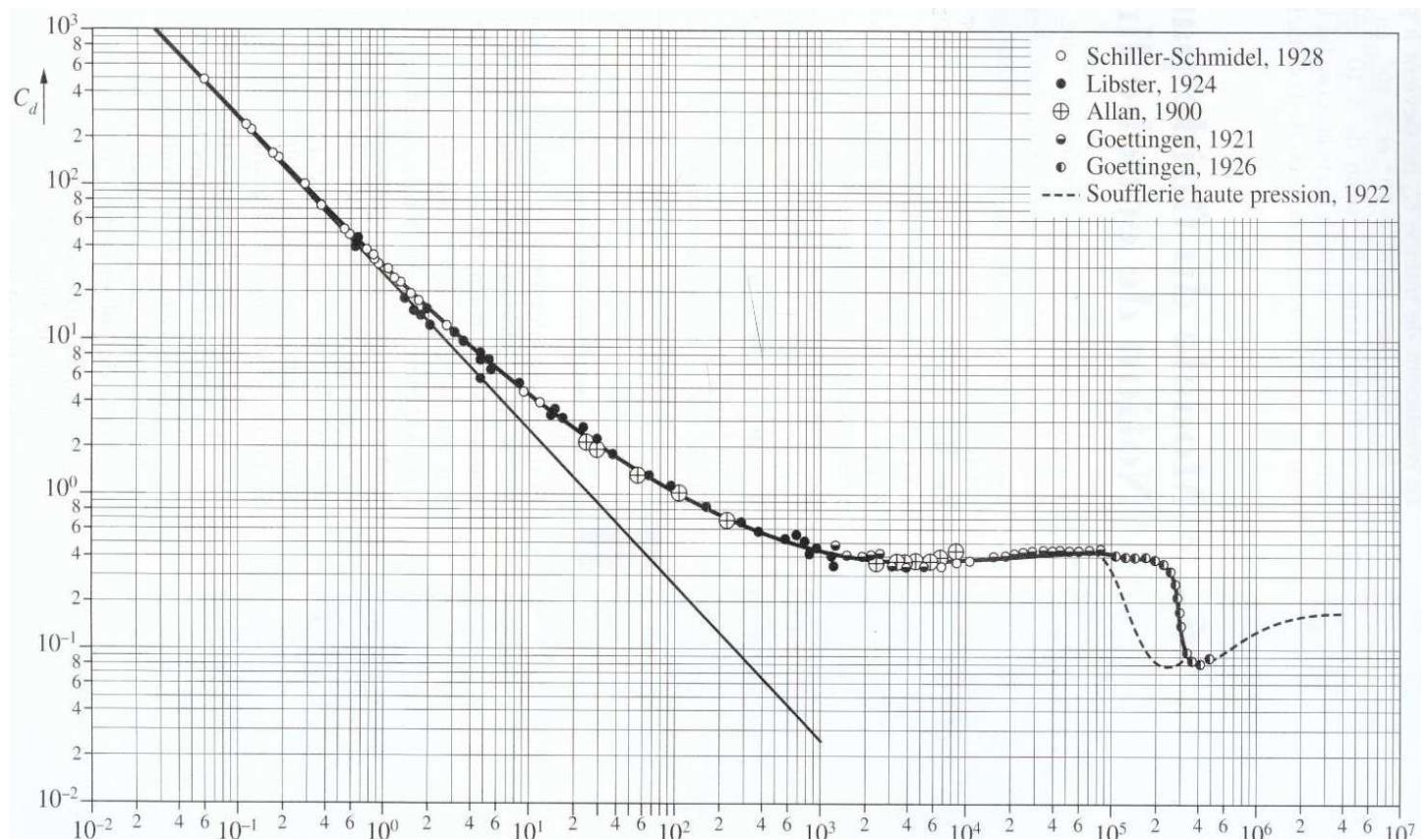
Un objet se déplaçant dans un fluide, à la vitesse  $\vec{V} = V\vec{u}$  par rapport au fluide, subit de la part de celui-ci une force globale  $\vec{F}$ , due à la pression et à la viscosité. On décompose cette force en deux termes : le terme  $\vec{F}_t$  tangentiel à  $\vec{V}$  est la *force de traînée* ; le terme  $\vec{F}_p$  normal à  $\vec{V}$  est la *force de portance*.

On peut écrire la force de traînée sous la forme standardisée générale : 
$$\boxed{\vec{F}_t = -\frac{1}{2}\rho C_x S V^2 \vec{u}}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $S$  l'aire de la *surface frontale* (ou *mâitre couple*) de l'objet (surface obtenue par projection de l'objet sur un plan orthogonal à la vitesse), et  $C_x$  le *coefficients de traînée* (noté aussi  $C_d$  pour *drag coefficient* en anglais), sans dimension, qui dépend de la forme de l'objet et du nombre de Reynolds de l'écoulement.

- Cas d'une sphère de rayon  $R$  : variations de  $C_x$

On détermine le nombre de Reynolds en utilisant le diamètre  $D = 2R$ . La surface frontale est un disque d'aire  $S = \pi R^2$ . De nombreux travaux expérimentaux ont permis d'obtenir les variations de  $C_x$  en fonction de  $Re$  (graphes toujours réalisés en échelles logarithmiques).



On distingue deux domaines particuliers importants pour lesquels on obtient un résultat simple.

- Pour  $Re < 1$  environ, on trouve  $\log C_x = \log 24 - \log Re$  (droite de pente  $-1$ ), soit  $C_x = \frac{24}{Re}$ , ce qui donne finalement, après simplification, une force proportionnelle à la vitesse (traînée linéaire) :  $\vec{F}_t = -6\pi\eta R\vec{V}$  (formule de Stokes).
- Pour  $10^3 < Re < 10^5$  environ, on trouve la valeur sensiblement constante  $C_x = 0,4$ , ce qui donne effectivement une force proportionnelle au carré de la norme de la vitesse (traînée quadratique) :  $\vec{F}_t = -0,2\rho\pi R^2 V^2 \vec{u}$ .

### 3. Équations de la dynamique

#### a) Équation de Navier–Stokes pour un écoulement incompressible

- Établissement de l'équation

Appliquons le PFD (ou le TRC, théorème de la résultante cinétique) à une particule fluide de volume  $d\tau$ , au sein d'un écoulement incompressible, dans un référentiel galiléen, en considérant le poids comme seule force volumique :

$$d m \vec{a}(M, t) = d \vec{P} + d \vec{F}_p + d \vec{F}_{\text{visc}} \quad \text{soit} \quad \rho d\tau \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \rho d\tau \vec{g} - \overline{\text{grad}} P d\tau + \eta \Delta \vec{v} d\tau.$$

En simplifiant par  $d\tau$  on obtient l'*équation de Navier–Stokes* :  $\boxed{\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \overline{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}}.$  éc incompr

Elle peut s'écrire aussi :  $\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overline{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \overline{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}.$

® Dans certaines conditions, il faut éventuellement ajouter au second membre des termes de forces volumiques supplémentaires, par exemple des forces d'inertie.

- La viscosité, phénomène diffusif

Considérons à nouveau le cas particulier de l'écoulement simple de cisaillement  $\vec{v}(M, t) = v_x(y, t) \vec{e}_x$ , où l'axe ( $Ox$ ) est supposé horizontal. Appliquons cette équation et projetons-la sur ( $Ox$ ) :

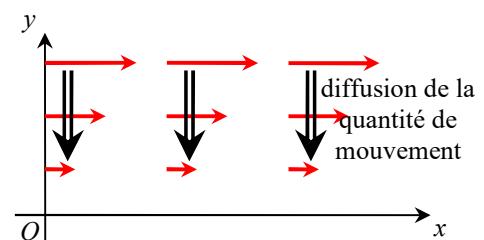
$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_0 = 0 - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_0 + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

On reconnaît la forme d'une équation de diffusion dans la direction ( $Oy$ ). Or la diffusion concerne toujours une grandeur extensive (nombre de particules, énergie...), dont la densité volumique apparaît dans les deux dérivées. Ici, en multipliant chaque terme par  $\rho$  (qui est une constante dans cet écoulement incompressible), on obtient :  $\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2(\rho v_x)}{\partial y^2}$

où  $\rho v_x$  est la densité volumique de quantité de mouvement sur ( $Ox$ ).

La viscosité est donc un phénomène de *diffusion de la quantité de mouvement*, se produisant spontanément depuis les zones de grande concentration (couches de fluide rapides) vers les zones de moindre concentration (couches lentes), dans une direction orthogonale à celle de la vitesse.

Le coefficient de diffusion correspondant n'est autre que la viscosité cinématique  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  (qui s'exprime bien en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ).



- Comparaison des ordres de grandeur

Le deuxième terme du premier membre,  $\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}$ , est le *terme convectif* (provenant de l'accélération convective). Le dernier terme du second membre,  $\eta \Delta \vec{v}$ , est le *terme diffusif* (exprimant la viscosité, diffusion de quantité de mouvement). Comparons leurs ordres de grandeur, pour un écoulement de taille caractéristique  $D$  :

$$\|\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}\| \sim \rho \frac{V}{D} V \quad \text{et} \quad \|\eta \Delta \vec{v}\| \sim \eta \frac{V}{D^2} \quad \text{donc} \quad \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \sim \frac{\rho V D}{\eta} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \sim Re} \quad (\text{nombre de Reynolds}).$$

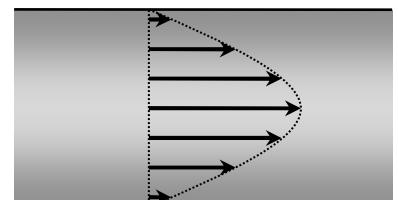
Ainsi le nombre de Reynolds représente *le rapport entre les effets convectif et diffusif* dans un écoulement.

- Si  $Re$  est élevé, le transfert de quantité de mouvement par convection prédomine (les particules rapides se mélangent facilement aux lentes, notamment par des tourbillons), et on peut négliger le terme  $\eta \Delta \vec{v}$  dans l'équation.
- Si  $Re$  est faible, le transfert de quantité de mouvement par diffusion (la viscosité) prédomine, et on peut négliger le terme  $\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}$  dans l'équation.

- Résolution et conditions aux limites

L'équation de Navier–Stokes est l'équation dynamique fondamentale pour étudier tout écoulement incompressible. Cette équation étant très complexe, et notamment non linéaire (à cause du deuxième terme), on doit faire des approximations avant de pouvoir la résoudre dans des conditions données. On peut notamment faire l'une des deux approximations ci-dessus, après avoir estimé le nombre de Reynolds.

Comme toujours, des conditions aux limites seront nécessaires pour déterminer certaines constantes. En plus des conditions aux limites cinématiques (notamment la continuité de la vitesse normale), la viscosité ajoute une condition supplémentaire : la *continuité de la vitesse tangentielle* (sinon la force de viscosité deviendrait infinie). En particulier, sur une paroi immobile, la vitesse du fluide doit être nulle (composantes normale et tangentielle toutes les deux nulles) : le fluide « accroche » aux parois.



## b) Écoulement parfait et relation de Bernoulli

### • Notion d'écoulement parfait

Un écoulement est dit *parfait* s'il ne comporte aucun phénomène diffusif : notamment, pas de viscosité et pas de transfert thermique. Une particule de fluide évolue alors de façon adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique.

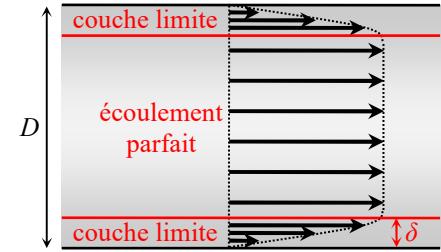
C'est un cas idéal qui suppose une viscosité nulle (ce qui, en réalité, n'existe que pour l'hélium superfluide à très basse température). En pratique, on peut s'en approcher dans certaines conditions.

### • Couche limite et écoulement parfait

Dans un écoulement à *grand nombre de Reynolds*, les effets de la viscosité sont notables seulement au voisinage des parois, dans une *couche limite* dont

l'épaisseur peut être évaluée selon :  $\delta \sim \frac{D}{\sqrt{Re}}$ . En dehors de la couche limite, les

effets de la viscosité sont négligeables : l'écoulement peut donc être considéré comme parfait dans le fluide suffisamment loin des parois.



® Sans le terme de viscosité, l'équation de Navier-Stokes devient l'équation d'Euler :  $\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla P$ .

Celle-ci est valable pour tout écoulement parfait, même s'il est compressible (car c'est justement le terme  $\eta \Delta \vec{v}$  qui nécessitait de se restreindre à un écoulement incompressible).

### • Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène

Considérons un écoulement parfait (on néglige  $\eta \Delta \vec{v}$  dans l'équation de Navier-Stokes), stationnaire  $\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \right)$ ,

incompressible et homogène (c'est partout le même fluide, sous la même phase, avec une masse volumique  $\rho$  uniforme).

L'équation s'écrit dans ce cas :  $\rho \left( \nabla^2 \frac{v^2}{2} + \vec{\omega} \cdot \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla P$  soit  $\nabla^2 \frac{\rho v^2}{2} + \rho \vec{\omega} \cdot \vec{v} \wedge \vec{v} = \rho \vec{g} - \nabla P$ .

Définissons un axe ( $Oz$ ) vertical ascendant, de sorte que  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  : on peut alors écrire  $\rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z = -\nabla(\rho g z)$ . En regroupant les trois gradients on obtient donc :  $\nabla \left( P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) = -\rho \vec{\omega} \cdot \vec{v} \wedge \vec{v}$ .

Distinguons alors deux sous-cas.

– Si l'écoulement est également irrotationnel, il reste :  $\nabla \left( P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) = \vec{0}$ . Or une fonction de gradient nul

partout est une fonction uniforme. On a donc dans ce cas :  $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{cte}$  dans tout le fluide. éc pft, sta, inc, hom, irr

– Sinon, calculons la circulation de ce vecteur le long d'une ligne de champ entre deux points A et B :

$$\int_A^B \nabla \left( P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B (\rho \vec{\omega} \cdot \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{l} \quad \text{soit} \quad \int_A^B d \left( P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) = 0$$

(l'intégrale de droite est nulle car  $d\vec{l} \parallel \vec{v}$  sur une ligne de courant, donc  $(\vec{\omega} \cdot \vec{v} \wedge \vec{v}) \perp d\vec{l}$ )

donc finalement  $P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$  pour A et B sur une même ligne de courant. éc pft, sta, inc, hom

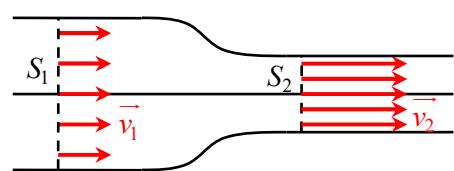
Le terme  $\frac{1}{2} \rho v^2$  est parfois appelé *pression dynamique* (par opposition à la *pression statique*  $P$ ).

La grandeur  $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z$  est appelée *charge*. On dit ainsi qu'il y a conservation de la charge (ou qu'il n'y a pas de perte de charge) le long d'une ligne de courant, ou même dans tout le fluide dans le cas irrotationnel.

### • Applications de la relation de Bernoulli

#### – Effet Venturi

Considérons, dans un écoulement stationnaire incompressible, un tube de courant horizontal de section variable (cela peut être une canalisation) : il y a conservation du débit volumique le long du tube de courant. Pour simplifier, supposons la vitesse uniforme sur chaque section rectiligne : le débit volumique est  $D_V = S_1 v_1 = S_2 v_2$  ; donc si  $S_2 < S_1$ , alors  $v_2 > v_1$ .



Appliquons alors la relation de Bernoulli sur une ligne de courant :  $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$  donc  $P_2 < P_1$ .

De façon plus générale, si on peut négliger l'effet du poids, la pression est plus faible dans une zone où la vitesse est plus grande (donc les lignes de courant plus serrées). Cette dépression permet d'interpréter diverses situations (portance sur une aile, aspiration par une trompe à eau ou un carburateur de voiture...).

– Tube de Pitot

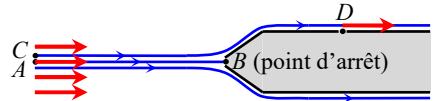


C'est un dispositif de mesure de vitesse présent notamment sur les avions : la mesure de pression en deux points différents ( $B$  et  $D$  sur le schéma) permet d'obtenir la vitesse  $v_\infty$  de l'écoulement loin en amont du tube.

Sur la ligne de courant  $AB$  :  $P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 + \rho g z_A = P_B + 0 + \rho g z_B$ . Le capteur de pression en  $B$  mesure donc  $P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$ .

Sur la ligne de courant voisine  $CD$  :  $P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 + \rho g z_C = P_D + \frac{1}{2} \rho v_D^2 + \rho g z_D$ . Le tube étant très étroit,  $z_D \approx z_C$  et  $v_D \approx v_\infty$  (écoulement très peu perturbé), donc  $P_D \approx P_\infty$  : le capteur en  $D$  mesure la pression « statique »  $P_\infty$ .

Finalement, la différence entre ces deux pressions permet de déterminer  $v_\infty = \sqrt{\frac{2(P_B - P_D)}{\rho}}$ .



– Formule de Torricelli

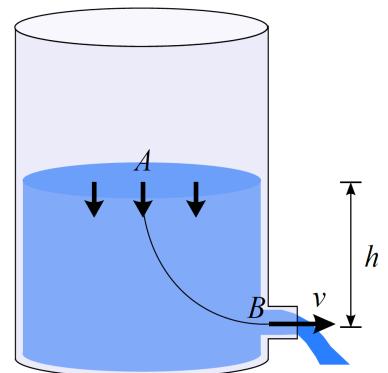
Considérons un récipient de section  $S$ , rempli de liquide, et qui se vide lentement par un très petit trou de section  $s \ll S$ . On note  $h$  la hauteur du liquide entre le trou de vidange et la surface libre, et on cherche à déterminer la vitesse  $v$  de sortie du liquide.

Il y a conservation du débit volumique (écoulement incompressible) :

$$D_{V(\text{surface libre})} = D_{V(\text{trou})} \text{ soit } S \left| \frac{dh}{dt} \right| = s v, \text{ dont on déduit } \left| \frac{dh}{dt} \right| \ll v.$$

On va alors considérer l'écoulement comme *quasi stationnaire*, ce qui permet d'appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point  $A$  de la

$$\text{surface libre et un point } B \text{ du trou : } P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B.$$



$$\text{La surface libre et le trou étant au contact de l'air, } P_A = P_B = P_{\text{atm}}. \text{ De plus } v_A = \left| \frac{dh}{dt} \right| \ll v = v_B. \text{ Enfin } z_A - z_B = h.$$

$$\text{On obtient donc finalement : } \rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2 \text{ d'où } v = \sqrt{2gh}.$$

C'est la même expression que celle de la vitesse d'un point matériel en chute libre sans vitesse initiale.

#### 4. Bilans dynamiques

- a) Surface de contrôle et bilan de masse
- b) Bilan d'énergie cinétique
- c) Bilan de quantité de mouvement

*Partie qui sera traitée en classe*