

Mc2 – Corrigé des exercices 1, 2, 3, 5 et 6

Exercice 1

a) Dans cet écoulement stationnaire et incompressible, il y a conservation des débits massique et volumique. Ainsi on peut écrire pour deux sections 1 et 2 (la 2 étant la plus basse) : $D_{v1} = D_{v2}$ soit $S_1 v_1 = S_2 v_2$ (avec les vitesses débitantes). Or l'eau accélère lors de sa chute, donc $v_2 > v_1$, d'où $S_2 < S_1$.

b) $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = g \vec{e}_z$ d'où par intégration par rapport au temps : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g}t + \vec{v}_0 = (gt + v_0) \vec{e}_z$. Pour obtenir la vitesse en fonction de z , on peut intégrer encore par rapport à t pour obtenir $z(t)$, puis exprimer le temps en fonction de z (solution d'une équation du second degré) et injecter dans la vitesse. Il est plus rapide d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$

d'où $v = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$, soit $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \sqrt{v_0^2 + 2gz} \vec{e}_z$, qui est bien l'expression donnée ensuite pour le champ des vitesses.

c) On calcule le champ des accélérations avec la dérivée particulaire : $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ soit

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{0} + \left(\sqrt{v_0^2 + 2gz} \vec{e}_z \cdot \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \sqrt{v_0^2 + 2gz} \vec{e}_z = \sqrt{v_0^2 + 2gz} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{v_0^2 + 2gz} \vec{e}_z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz} \frac{2g}{2\sqrt{v_0^2 + 2gz}} \vec{e}_z \quad \text{d'où}$$

finalement $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = g \vec{e}_z$, qui est bien l'accélération écrite d'un point de vue lagrangien.

Exercice 2

a) Puisque chaque particule conserve sa vitesse (direction, sens et norme), son mouvement est rectiligne uniforme, donc $\vec{a} = \vec{0}$.

b) Considérons la particule se trouvant en M à l'instant t . Elle possède toujours la vitesse qu'elle avait au départ, soit $\vec{v} = \vec{v}_{\text{ini}} = \frac{r_{\text{ini}}}{\tau} \vec{e}_r$,

et elle a donc parcouru entre 0 et t la distance : $r - r_{\text{ini}} = v t \Leftrightarrow r - v \tau = v t$ d'où on tire $v = \frac{r}{t + \tau}$, soit $\vec{v}(M, t) = \frac{r}{t + \tau} \vec{e}_r$.

c) Plus une particule fluide est loin du centre initialement, plus elle va vite : les particules s'éloignent donc les unes des autres, c'est-à-dire que le fluide se dilate : l'écoulement n'est pas incompressible. Mathématiquement, on calcule :

$$\text{div } \vec{v} = \text{div} \left(\frac{r}{t + \tau} \vec{e}_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^3}{t + \tau} \right) \text{ d'après la formule fournie, soit } \text{div } \vec{v} = \frac{3}{t + \tau} > 0. \text{ La divergence est non nulle, l'écoulement n'est}$$

pas incompressible. (Son signe positif indique que le champ de vitesse a tendance à diverger géométriquement, ce qui est évident).

d) $\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r}{t + \tau} \vec{e}_r \right) + \left(\frac{r}{t + \tau} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{r}{t + \tau} \vec{e}_r = -\frac{r}{(t + \tau)^2} \vec{e}_r + \frac{r}{t + \tau} \times \frac{1}{t + \tau} \vec{e}_r$ soit $\vec{a}(M, t) = \vec{0}$, comme vu en a.

e) Le fluide occupe à $t = 0$ l'intérieur d'une sphère de rayon r_0 . À l'instant t quelconque, il occupe toujours une sphère, dont le rayon est la position des particules les plus éloignées de O : elles étaient initialement à $r_{\text{ini}} = r_0$, et sont maintenant à $r_0 + v t = r_0 + \frac{r_0}{\tau} t$.

La masse totale se conserve, soit : $m(t) = m(0) \Leftrightarrow \rho(t) \frac{4}{3} \pi \left(r_0 + \frac{r_0}{\tau} t \right)^3 = \rho(0) \frac{4}{3} \pi r_0^3$ d'où $\rho(t) = \frac{\rho(0)}{(1 + t/\tau)^3}$.

f) Équation de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} + \text{div} \left(\frac{\rho r}{t + \tau} \vec{e}_r \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} + \frac{3\rho}{t + \tau} = 0$. Pour résoudre cette équation

différentielle à coefficient non constant, on sépare les variables : $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{3dt}{t + \tau}$. On peut alors intégrer de chaque côté entre les instants

$$0 \text{ et } t : \ln \rho(t) - \ln \rho(0) = -3 \ln(t + \tau) + 3 \ln \tau \text{ ce qui équivaut à } \rho(t) = \frac{\rho(0)}{(1 + t/\tau)^3}.$$

Exercice 3

a) Le champ des vitesses ne dépend pas de la variable t : l'écoulement est stationnaire. En revanche ce champ dépend d'une variable spatiale : l'écoulement n'est pas uniforme.

b) On calcule la vitesse pour les cinq cotes indiquées : en $z = 0$ et en $z = h$, $\vec{v} = \vec{0}$; en

$z = h/4$ et en $z = 3h/4$, $\vec{v}(M) = \frac{3}{4} v_{\text{max}} \vec{e}_x$; en $z = h/2$, $\vec{v}(M) = v_{\text{max}} \vec{e}_x$.

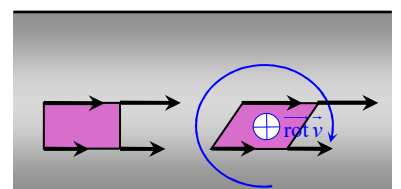
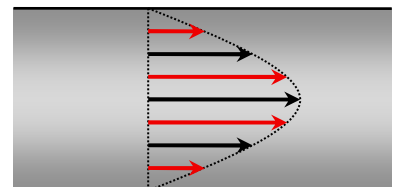
Sur le schéma sont placés les trois vecteurs ci-dessus non nuls, et quelques autres (en rouge), ainsi que le profil des vitesses, qui est parabolique (fonction en z^2).

c) On schématise une particule fluide par un rectangle, dont le côté du haut a une vitesse supérieure à celle du côté du bas. Ainsi, à l'instant $t + dt$, les points du haut se sont déplacés un peu plus que ceux du bas, ce qui déforme la particule fluide en un parallélogramme.

On peut alors percevoir une certaine rotation (dans le sens horaire pour ce cas), donc l'écoulement n'est pas irrotationnel.

En revanche, l'aire du parallélogramme est la même que celle du rectangle, autrement dit le volume de la particule fluide n'a pas changé : l'écoulement est incompressible.

Vérification par le calcul : $\text{rot } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e}_y = v_{\text{max}} \left(\frac{4}{h} - \frac{8z}{h^2} \right) \vec{e}_y \neq \vec{0}$, avec $\frac{4}{h} - \frac{8z}{h^2} > 0$ pour $z < \frac{h}{2}$, comme sur le schéma ; $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$.



$$d) D_V = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{y=0}^a \int_{z=0}^h v_{\max} \left(\frac{4z}{h} - \frac{4z^2}{h^2} \right) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \, dy \, dz = v_{\max} a \left[\frac{2z^2}{h} - \frac{4z^3}{3h^2} \right]_{z=0}^h \quad \text{soit} \quad \boxed{D_V = \frac{2}{3} v_{\max} a h}.$$

Vitesse débitante : $v_d = \frac{D_V}{ah}$ soit $\boxed{v_d = \frac{2}{3} v_{\max}}$. Le débit est le même que si la vitesse avait cette même valeur v_d sur toute la largeur.

□ Exercice 5

a) Le champ des vitesses ne dépend pas de la variable t : l'écoulement est stationnaire.

En revanche ce champ dépend de deux variables spatiales : l'écoulement n'est pas uniforme.

b) $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ soit $\boxed{\text{div } \vec{v} = 0}$ car $v_x = \omega_0 y$ ne dépend pas de x , ni $v_y = \omega_0 x$ de y . Donc l'écoulement est incompressible.

c) $\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = (\omega_0 - \omega_0) \vec{e}_z$ soit $\boxed{\text{rot } \vec{v} = \vec{0}}$: l'écoulement est irrotationnel. On peut donc définir un potentiel des vitesses

$\Phi(M)$ tel que $\vec{v}(M) = \text{grad } \Phi(M)$. Projétons cette relation sur la base cartésienne : $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \omega_0 y$ (1) ; $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \omega_0 x$ (2) ; $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ (3).

La troisième montre que Φ ne dépend pas de z , donc on cherche une fonction $\Phi(x, y)$. On intègre (1) par rapport à x :

$\Phi(x, y) = \omega_0 y x + A(y)$. On dérive ceci par rapport à y : $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \omega_0 x + A'(y)$. Et on identifie ceci avec (2) : $A'(y) = 0$ donc $A(y) = \text{cte}$,

que l'on notera donc simplement A . Finalement : $\boxed{\Phi(x, y) = \omega_0 y x + A}$.

d) $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{0} + \left(\omega_0 y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0 x \frac{\partial}{\partial y} \right) (\omega_0 y \vec{e}_x + \omega_0 x \vec{e}_y)$ soit $\boxed{\vec{a} = \omega_0^2 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)}$.

e) $\frac{dx}{\omega_0 y} = \frac{dy}{\omega_0 x} \Leftrightarrow x \, dx = y \, dy$. On intègre : $x^2 = y^2 + \text{cte}$ ou $\boxed{y^2 - x^2 = \text{cte}}$.

f) $\boxed{\dot{x}(t) = \omega_0 y(t)}$ (4) et $\boxed{\dot{y}(t) = \omega_0 x(t)}$ (5). En additionnant membre à membre on obtient : $\dot{u}(t) = \omega_0 u(t)$, qui donne $u(t) = C \exp(\omega_0 t)$.

En soustrayant membre à membre on obtient : $\dot{v}(t) = -\omega_0 v(t)$, qui donne $v(t) = D \exp(-\omega_0 t)$. Avec les conditions initiales :

$\boxed{u(t) = (x_0 + y_0) \exp(\omega_0 t)}$ et $\boxed{v(t) = (x_0 - y_0) \exp(-\omega_0 t)}$. Finalement : $x(t) = \frac{u(t) + v(t)}{2} \Leftrightarrow \boxed{x(t) = x_0 \text{ch}(\omega_0 t) + y_0 \text{sh}(\omega_0 t)}$; et

$y(t) = \frac{u(t) - v(t)}{2} \Leftrightarrow \boxed{y(t) = x_0 \text{sh}(\omega_0 t) + y_0 \text{ch}(\omega_0 t)}$.

g) $\ddot{x}(t) = x_0 \omega_0^2 \text{ch}^2(\omega_0 t) + y_0 \omega_0^2 \text{sh}^2(\omega_0 t) = \omega_0^2 x(t)$ et $\ddot{y}(t) = x_0 \omega_0^2 \text{sh}^2(\omega_0 t) + y_0 \omega_0^2 \text{ch}^2(\omega_0 t) = \omega_0^2 y(t)$ soit $\boxed{\vec{a} = \omega_0^2 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)}$.

h) Puisqu'on veut vérifier que l'on retrouve l'équation de la question e, on calcule $y^2 - x^2$:

$$y(t)^2 - x(t)^2 = x_0^2 \text{sh}^2(\omega_0 t) + y_0^2 \text{ch}^2(\omega_0 t) + 2x_0 y_0 \text{sh}(\omega_0 t) \text{ch}(\omega_0 t) - x_0^2 \text{ch}^2(\omega_0 t) - y_0^2 \text{sh}^2(\omega_0 t) - 2x_0 y_0 \text{ch}(\omega_0 t) \text{sh}(\omega_0 t)$$

soit $y(t)^2 - x(t)^2 = (y_0^2 - x_0^2)(\text{ch}^2(\omega_0 t) - \text{sh}^2(\omega_0 t)) = y_0^2 - x_0^2$. On a bien trouvé quelque chose de la forme $\boxed{y^2 - x^2 = \text{cte}}$.

i) Dans nos équations, $x(t)$ et $y(t)$ tendent tous les deux vers l'infini simultanément, ce qui exclut le troisième schéma (où y est borné) et le premier schéma (où y tend vers zéro quand x tend vers l'infini, et inversement). Le bon schéma est donc le deuxième.

□ Exercice 6

a) En $r = a$, $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = -2V_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$: la vitesse au contact du solide est bien tangente au solide (composante normale nulle).

En $r \rightarrow \infty$, $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = +V_0 \cos \theta \vec{e}_r - V_0 \sin \theta \vec{e}_\theta = V_0 \vec{e}_x = -\vec{V}_0$, ce qui correspond à $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ (loi de composition des vitesses) : à grande distance, le fluide reste immobile, non affecté par la présence du solide.

b) $\theta = 0$: $\boxed{\vec{v}(a, 0)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}}$. $\theta = \pi/2$: $\boxed{\vec{v}(a, \pi/2)_{\mathcal{R}'} = +2V_0 \vec{e}_x}$. $\theta = \pi$: $\boxed{\vec{v}(a, \pi)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}}$. $\theta = 3\pi/2$: $\boxed{\vec{v}(a, 3\pi/2)_{\mathcal{R}'} = +2V_0 \vec{e}_x}$.

c) Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M)_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

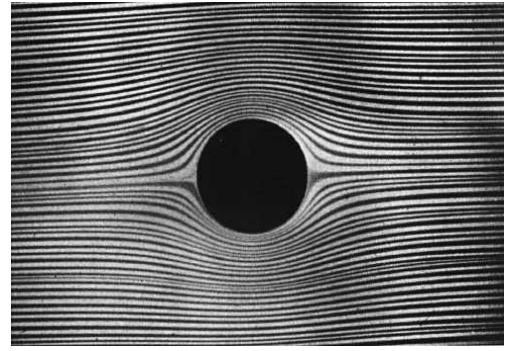
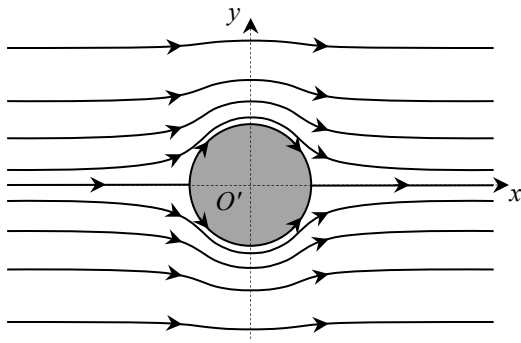
soit $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = +V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \vec{e}_r - V_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta - V_0 \vec{e}_x$ soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = -V_0 \frac{a^2}{r^2} \cos \theta \vec{e}_r - V_0 \frac{a^2}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\theta}$.

d) L'écoulement est stationnaire dans $\mathcal{R}'$, car le champ de vitesse ne contient que des termes indépendants du temps. Mais l'écoulement n'est pas stationnaire dans $\mathcal{R}$, car ce champ de vitesse est exprimé dans la base cylindrique liée au cylindre, donc les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ ainsi que les coordonnées r et θ dépendent du temps dans un référentiel où le cylindre bouge. Il est d'ailleurs évident que si on est fixe dans $\mathcal{R}$, on voit l'écoulement varier lorsque le cylindre passe.

e) Dans $\mathcal{R}'$, les lignes de champ sont confondues avec les trajectoires des particules fluides (écoulement stationnaire).

On utilise les informations trouvées sur le champ de vitesse au contact du cylindre (tangent au cylindre) et à grande distance (uniforme), et entre ces deux zones on trace des lignes de forme intermédiaire, qui montrent comment le fluide contourne le cylindre. D'autre part, l'expression du champ de vitesse est symétrique par rapport à l'axe $(O'x)$ et antisymétrique par rapport à l'axe $(O'y)$.

(Voir figures pages suivante.)



f) $d\overline{OM} // \vec{v}$ soit $\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta} \Leftrightarrow \frac{r^2}{a^2 \cos \theta} dr = \frac{r^2}{a^2 \sin \theta} r d\theta \Leftrightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$ d'où après intégration : $\ln r = \ln(\sin \theta) + \text{cte}$
 $\Leftrightarrow r = \text{cte} \times \sin \theta$. Si on note la constante $2b$, l'équation $\boxed{r = 2b \sin \theta}$ est celle d'un cercle de rayon b et passant par O .