

Exercices du chapitre Mc3

Pour les opérateurs en coordonnées cylindriques ou sphériques, utiliser le complément mathématique.

Ordres de grandeur en mécanique des fluides

1. Écoulement dans une canalisation

Un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ circule dans une canalisation de diamètre d avec un débit D_V . Évaluer le nombre de Reynolds dans les deux cas suivants, et en déduire la nature de l'écoulement et la validité éventuelle du modèle de l'écoulement parfait :

- eau chaude dans un tuyau ($\rho = 990 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $d = 8,0 \text{ cm}$, $D_V = 8,5 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$) ;
- fioul lourd dans un oléoduc ($\rho = 932 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 11,0 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $d = 25 \text{ cm}$, $D_V = 19,7 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$).

2. Nombre de Mach et écoulement incompressible

Le nombre de Mach d'un écoulement est défini par : $Ma = \frac{V}{c}$

où V est l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement et c la célérité du son dans le fluide. Le fait qu'un écoulement de gaz puisse être considéré comme incompressible est lié à l'ordre de grandeur de Ma .

On note ρ la masse volumique du fluide, μ l'ordre de grandeur de la variation de cette masse volumique dans l'écoulement, P la pression, p l'ordre de grandeur de la variation de la pression dans l'écoulement, L une longueur caractéristique de l'écoulement, τ une durée caractéristique de l'écoulement.

a) Énoncer l'équation locale de conservation de la masse, et en déduire qu'un écoulement incompressible vérifie $\text{div } \vec{v} = 0$.

En pratique, on pourra considérer qu'un écoulement est incompressible si $\|\text{div } \vec{v}\| \ll \frac{V}{L}$.

b) Déduire de cette condition une relation en ordres de grandeur entre μ , τ , ρ , V et L .

c) Écrire l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement parfait stationnaire, en négligeant l'effet du poids (très faible dans un gaz). En déduire une relation en ordres de grandeur entre ρ , V et p .

d) On montre en physique des ondes (voir chapitre On2) que $p \sim \mu c^2$. En déduire finalement qu'un écoulement de gaz peut être considéré comme incompressible lorsque $Ma^2 \ll 1$.

Équations locales de la dynamique

3. Écoulement de Poiseuille

On étudie l'écoulement stationnaire et incompressible d'un liquide, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η , dans une canalisation cylindrique d'axe horizontal (Oz), de rayon R et de longueur L . On suppose $R \ll L$, ce qui permet de négliger l'effet du poids dans le champ de pression, qui est alors de la forme $P(z)$ en coordonnées cylindriques. Le champ de vitesse est a priori de la forme $\vec{v}(M) = v_z(r, z) \vec{e}_z$.

On note $\Delta P = P(0) - P(L) > 0$: c'est cette différence de pression entre l'entrée et la sortie de la canalisation qui provoque l'écoulement du liquide.

a) Montrer que le champ de vitesse est nécessairement indépendant de z .

b) Écrire l'équation de Navier-Stokes, puis montrer que les hypothèses faites permettent de la réduire à $\text{grad } P = \eta \Delta \vec{v}$.

c) Montrer que $\frac{dP}{dz}$ est une constante. En déduire l'expression de $P(z)$ en fonction de $P(0)$, ΔP , L et z .

d) Déterminer l'expression du champ de vitesse, et représenter

le profil des vitesses sur un schéma.

e) Déterminer l'expression du débit volumique D_V .

f) Proposer une définition pour la résistance hydraulique R_h de la canalisation, puis exprimer R_h en fonction de L , R et η . Que devient R_h si le rayon R est divisé par 2 ?

4. Cavitation dans l'eau

Lorsqu'un objet solide se déplace rapidement dans l'eau, il peut créer autour de lui de petites bulles de vapeur d'eau : c'est le phénomène de cavitation, observé par exemple au voisinage des hélices de navires.

On cherche ici à déterminer la durée T de disparition (implosion) d'une de ces bulles, de rayon initial a_0 , entourée d'une quantité d'eau suffisante pour être considérée comme infinie. À cette échelle, on pourra négliger l'effet de la pesanteur. À grande distance de la bulle, la pression dans l'eau est P_∞ et la vitesse de l'eau est nulle.

a) On suppose que la durée T ne dépend que de a_0 , de P_∞ et de la masse volumique ρ de l'eau : on cherche donc une expression de la forme : $T = k \cdot a_0^\alpha \cdot P_\infty^\beta \cdot \rho^\gamma$ où k est un facteur sans dimension. Déterminer les exposants α , β et γ par analyse dimensionnelle. En déduire l'ordre de grandeur de T pour une bulle de taille millimétrique.

On cherche maintenant une expression exacte de T (avec la valeur du coefficient k).

Le rayon de la bulle est noté $a(t)$ à un instant quelconque. Les champs de vitesse et de pression dans l'eau entourant la bulle ($r > a(t)$) sont à symétrie sphérique, avec une vitesse uniquement radiale : $\vec{v}(M, t) = v_r(r, t) \vec{e}_r$ et $P(M, t) = P(r, t)$. La vitesse est nulle partout à l'instant initial. La pression à l'intérieur de la bulle, inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau, est négligeable devant P_∞ .

L'écoulement de l'eau est considéré comme parfait et incompressible, dans le référentiel terrestre galiléen où le centre de la bulle est immobile.

b) À partir de l'incompressibilité de l'eau, montrer que la vitesse est de la forme : $v_r(r, t) = \frac{a(t)^2}{r^2} \frac{da}{dt}$.

c) Montrer que l'écoulement admet un potentiel des vitesses $\Phi(r, t)$, et le déterminer et prenant $\Phi(\infty, t) = 0$.

d) En calculant la circulation de l'équation de Navier-Stokes sur une ligne de courant entre $r = a(t)$ et $r \rightarrow \infty$, établir

l'équation différentielle : $a(t) \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = -\frac{P_\infty}{\rho}$.

e) On pose $z = \left(\frac{da}{dt} \right)^2$. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z(a)$. Résoudre cette équation en séparant les variables et en déduire la relation :

$$a(t)^3 \left[\frac{2P_\infty}{3\rho} + \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right] = \text{cte (préciser la constante)}.$$

f) Exprimer alors $\frac{da}{dt}$, puis calculer T en s'aidant de

l'intégrale : $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}} dx = 0,74$.

Comparer à la formule obtenue à la question a.

5. Propulsion d'une fusée

Une fusée a les caractéristiques suivantes : masse des structures et de l'équipement $M = 5,0 \text{ t}$; masse du mélange propulsif au départ : $m_0 = 50,0 \text{ t}$; vitesse d'éjection des gaz brûlés (par rapport à la fusée) : $u = 2500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; débit des gaz brûlés : $D = 400 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. On néglige la résistance de l'air et on suppose constante l'intensité de la pesanteur ($g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). L'instant du lancement est pris comme origine des temps ; on cherche à déterminer la vitesse $\vec{v}(t)$ de la fusée, puis son altitude $z(t)$.

a) La fusée étant un système ouvert, on doit se ramener à un système fermé : on prend la fusée avec le carburant restant à un instant t ; à un instant ultérieur $t + dt$, ce système s'est séparé en deux (d'une part les gaz éjectés, d'autre part la fusée avec le carburant restant). Quelle est la masse $m(t)$ de ce système ? Donner l'expression de la variation élémentaire $d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)$ de la quantité de mouvement de ce système en fonction de $d\vec{v} = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$, M , m_0 , D , t , dt et $\vec{u}$. (On négligera les termes infiniment petits d'ordre 2.)

b) En déduire, par application du théorème de la quantité de mouvement, l'accélération $\vec{a}(t)$ de la fusée. Vérifier que les valeurs numériques données permettent effectivement le décollage de la fusée.

c) Après avoir projeté sur l'axe vertical ascendant (Oz), déterminer la vitesse $v(t)$, puis l'altitude $z(t)$ de la fusée.

d) À quel instant t_1 se termine la combustion du carburant ? Calculer alors $v(t_1)$ et $z(t_1)$.

6. Puissance d'un hélicoptère

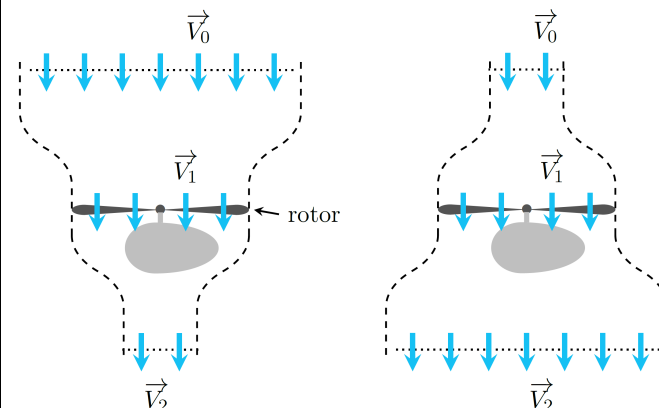
On considère un hélicoptère en situation de vol purement vertical, à vitesse constante dans le référentiel terrestre. On modélise l'air par un fluide parfait, incompressible (on note ρ sa masse volumique), de température $T_0 = 280 \text{ K}$ uniforme.

On suppose de plus que la pression de l'air reste égale à la pression atmosphérique $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ sauf au voisinage immédiat des pales du rotor : On note P_1^+ la pression juste au-dessus des pales, P_1^- celle juste au-dessous.

La masse de l'appareil (avec passagers et matériel) est $m = 1500 \text{ kg}$. Le rotor est constitué de trois pales, chacune de longueur $\ell = 5,35 \text{ m}$.

a) Énoncer la relation de Bernoulli. Justifier que le terme de pesanteur est négligeable devant les deux autres dans l'étude de l'hélicoptère.

On se place dans le référentiel lié à l'hélicoptère et on cherche à modéliser l'allure du tube de courant balayé par le rotor en vol vertical à vitesse constante : deux propositions sont données ci-dessous.



b) Comparer V_0 et V_2 dans les deux cas.

c) Appliquer la relation de Bernoulli pour l'air situé au-dessus du rotor, puis pour l'air situé au-dessous. En déduire l'expression de $P_1^+ - P_1^-$, et conclure sur le schéma correct.

Pour la suite, on raisonnera sur le tube de courant identifié ci-dessus, et on admettra que $V_1 = \frac{V_0 + V_2}{2}$.

d) On suppose dans cette question que l'hélicoptère est en situation de vol stationnaire (c'est-à-dire à altitude constante, sans mouvement horizontal par rapport au sol) : on pourra alors supposer $V_0 \ll V_2$. À partir d'un bilan d'énergie cinétique, montrer que la puissance $\mathcal{P}$ que doit fournir le rotor à l'air s'écrit : $\mathcal{P} = 2\rho\pi\ell^2V_1^3$.

e) Établir la relation $\mathcal{P} = \sqrt{\frac{(mg)^3}{2\rho\pi\ell^2}}$, puis déterminer la valeur numérique de $\mathcal{P}$. Données : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $M_{\text{air}} = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

f) Expliquer pourquoi un hélicoptère ne peut pas voler au-dessus d'une certaine altitude (plafond).

Réponses partielles

1. a) $Re = \frac{4\rho D_V}{\pi\eta d} = 2,2 \cdot 10^5$.

2. b) $\frac{1}{\rho} \frac{\mu}{\tau} \ll \frac{V}{L}$.

3. d) $\vec{v}(M) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_z$. e) $D_V = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$.

4. a) $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$.

5. a) $d\vec{p} = (M + m_0 - Dt) d\vec{v} + D dt \vec{u}$.

c) $v(t) = u \ln \left(\frac{M + m_0}{M + m_0 - Dt} \right) - gt$.

6. c) Le premier schéma est le bon.

d) $\mathcal{P} = 2\rho\pi\ell^2V_1^3$.