

Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 3**□ Problème A** (E3A PSI 2013)

A1. Les couches de fluide glissent les unes sur les autres : les lignes de courant sont rectilignes, parallèles à l'axe (Ox) et orientées vers les x croissants.

A2. En écoulement stationnaire, on cherche la vitesse sous la forme $\vec{v}(M) = v(x, y, z)\vec{e}_x$. Or l'écoulement est invariant selon l'axe (Oy) donc v est indépendante de y . De plus il est incompressible, donc $\text{div } \vec{v} = 0$, ce qui donne ici $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Il reste $\boxed{\vec{v}(M) = v(z)\vec{e}_x}$.

A3. $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$ avec $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (écoulement stationnaire) et $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x = 0$. Il reste donc : $\boxed{\text{grad} P = \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}}$.

A4. Projections : $\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v}{dz^2}}$; $\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = 0}$; $\boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha}$.

A5. D'après la deuxième, P est indépendante de y . D'après la troisième : $P(x, z) = -\rho g \cos \alpha z + A(x)$. Condition aux limites : $P(x, h) = -\rho g \cos \alpha h + A(x) = P_{\text{atm}}$, $\forall x$ donc $A = P_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha h$ (indépendante de x), d'où $\boxed{P(z) = P_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha (h - z)}$.

A6. La première projection devient : $\boxed{\frac{d^2 v}{dz^2} + k \sin \alpha = 0}$ avec $\boxed{k = \frac{\rho g}{\eta}}$ ($= \frac{g}{\nu}$).

A7. $\boxed{v(0) = 0}$ car la vitesse d'un fluide visqueux au contact d'une paroi solide est égale à celle de cette paroi, donc nulle ici.

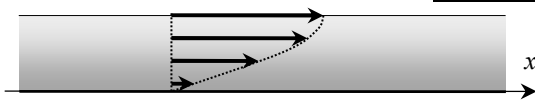
De plus la contrainte tangentielle de viscosité $\eta \frac{dv}{dz}$ est nulle en h , soit $\boxed{\frac{dv}{dz}(h) = 0}$.

A8. On intègre une première fois : $\frac{dv}{dz} = -k \sin \alpha z + B$, avec $-k \sin \alpha h + B = 0$, donc $\frac{dv}{dz} = k \sin \alpha (h - z)$. Puis

$v(z) = k \sin \alpha \left(hz - \frac{z^2}{2} \right) + C$, avec $v(0) = C = 0$, donc $\boxed{v(z) = \beta z(2h - z)}$ avec $\boxed{\beta = \frac{k \sin \alpha}{2} = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta}}$. v est maximale là où sa

dérivée s'annule, donc à la surface libre ($z = h$) : $\boxed{v_{\text{max}} = v(h) = \beta h^2 = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} h^2}$. AN $\boxed{v_{\text{max}} = 1,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}}$.

A9.



D'après l'expression de $v(z)$, le profil de vitesse est parabolique, avec le maximum à la surface et le minimum nul sur le plan incliné.

A10. $Q_V = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{y=0}^W \int_{z=0}^h \beta z(2h - z) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x dy dz = \beta W \left[hz^2 - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^h$ soit $\boxed{Q_V = \frac{2}{3} \beta W h^3 = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\eta} W h^3}$. La moyenne sur la

section est définie par $Q_V = \langle v \rangle S = \langle v \rangle W h$ donc $\langle v \rangle = \frac{2}{3} \beta h^2$ soit $\boxed{\langle v \rangle = \frac{2}{3} v_{\text{max}}}$.

A11. Le nombre de Reynolds est le rapport entre les ordres de grandeur des flux convectifs (dans la direction de l'écoulement) et diffusifs (dans la direction orthogonale), donc par exemple entre le débit moyen d'énergie cinétique et la puissance moyenne des forces de viscosité. Si on considère par exemple un cube de fluide de côté h : $D_{E_c} \sim D_m \langle v \rangle^2 = \rho D_V \langle v \rangle^2 = \rho h^2 \langle v \rangle^3$ et

$\mathcal{P}_v \sim F_v \langle v \rangle \sim \eta \left| \frac{d^2 v}{dz^2} \right| h^3 \langle v \rangle = \eta \frac{\langle v \rangle}{h^2} h^3 \langle v \rangle = \eta h \langle v \rangle^2$ donc $\boxed{Re = \frac{\rho h \langle v \rangle}{\eta}}$. AN $\boxed{Re = 3 \cdot 10^{-4} \ll 1}$: l'écoulement est bien laminaire.

B1. Avec cette nouvelle forme de vitesse, on a toujours $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = 0$, mais cette fois $\Delta \vec{v} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x$. Les deux dernières projections de l'équation de Navier-Stokes donnent toujours le même champ de pression $P(z)$. La première projection donne donc

l'équation différentielle : $\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} = 0}$.

B2. On pose $y = ay'$ donc $dy = a dy'$, et de même $dz = a dz'$. Avec aussi $v = v_0 v'$, l'équation différentielle peut donc s'écrire :

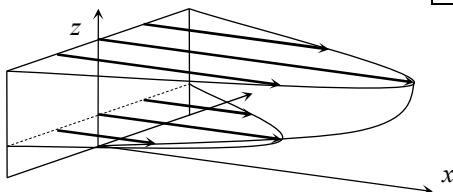
$\frac{v_0}{a^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{v_0}{a^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} = 0$. On obtient $\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$ en posant $\boxed{v_0 = \frac{a^2 \rho g \sin \alpha}{\eta}}$ ($= a^2 k \sin \alpha$).

B3. Comme précédemment, $\boxed{v'(y', 0) = 0}$ (adhésion au fond par viscosité), et de même $\boxed{v'(\pm 1/2, z') = 0}$ (adhésion aux bords), et aussi

$\boxed{\frac{\partial v'}{\partial z'}(y', 1/2) = 0}$ (absence de contrainte de cisaillement au contact de l'air).

B4. On lit pour $z' = 1/2$ (surface libre du glacier) : $\boxed{v'_{\text{max}} = 0,0575}$.

B5.



La vitesse augmente du fond vers la surface (comme précédemment), et des bords vers le centre : on obtient des profils paraboliques dans les deux dimensions.

B6. La longueur de référence 800 m correspond à 6,9 cm sur la figure, et on mesure 8,4 cm pour le parcours de la balise centrale, donc on peut évaluer la longueur parcourue à $D = 970 \text{ m}$ en 9 ans, ce qui donne une vitesse moyenne $v_m = 110 \text{ m} \cdot \text{an}^{-1} = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Avec les notations précédentes, cette vitesse correspond à $v_{\max} = v'_{\max} v_0$ donc $v_0 = \frac{v_m}{v'_{\max}}$. AN $v_0 = 6,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

B7. $\eta = \frac{a^2 \rho g \sin \alpha}{v_0}$. AN $\eta = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ en prenant $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, valeur proche de celle de l'eau liquide. Cette viscosité est très grande devant celle du miel, qui est déjà un fluide très visqueux. Par ailleurs cette modélisation de la glace comme un fluide newtonien semble correcte, puisque les courbes des balises ont sensiblement la forme de paraboles.

□ Problème B (Mines-Ponts PC 2019)

19. L'expérience courante montre qu'un liquide devient plus visqueux lorsqu'il se refroidit : chocolat ou beurre fondu, lave de volcan... Cela peut s'expliquer au niveau microscopique : les molécules ayant une agitation thermique moins grande restent plus liées entre elles. Donc la viscosité de l'eau liquide de l'Arctique est plus élevée que celle de l'eau à température ambiante.

20. Le poids d'une masse dm est $d\vec{P} = dm \vec{g}_0 = -dm g_0 \vec{e}_z$, soit $\vec{p}_m = -g_0 \vec{e}_z$ par unité de masse. Le force d'inertie de Coriolis est $d\vec{F}_{ic} = -dm \vec{a}_c = -2dm \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T} = -2dm \frac{2\pi}{T_0} \vec{e}_z \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y) = -2dm \frac{2\pi}{T_0} (v_x \vec{e}_y - v_y \vec{e}_x)$, soit $\vec{f}_{ic,m} = \frac{4\pi}{T_0} (v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y)$.

Les forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement de la Terre sont incluses dans le poids.

21. Équation de Navier-Stokes dans le référentiel terrestre non galiléen : $\rho_e \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \rho_e \vec{g}_0 + \eta_e \Delta \vec{v} + \rho_e \vec{f}_{ic,m}$ soit

$\rho_e \left(\vec{0} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v}(z) \right) = -\text{grad} P - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e (\Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y) + \rho_e \frac{4\pi}{T_0} (v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y)$. Le membre de gauche est nul, il reste :

$$\vec{0} = -\text{grad} P - \rho_e g_0 \vec{e}_z + \eta_e \left(\frac{d^2 v_x}{dz^2} \vec{e}_x + \frac{d^2 v_y}{dz^2} \vec{e}_y \right) + \rho_e \frac{4\pi}{T_0} (v_y(z) \vec{e}_x - v_x(z) \vec{e}_y). \quad \text{Projection sur } \vec{e}_z : \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_e g_0 \quad \text{d'où}$$

$P(x, y, z) = -\rho_e g_0 z + A(x, y)$. À la surface, $P(x, y, 0) = P_0 = A(x, y)$ donc finalement $P(z) = P_0 - \rho_e g_0 z$: P ne dépend que de z .

22. Projections sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$: $0 = \eta_e \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \rho_e \frac{4\pi}{T_0} v_y$ soit $\frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{1}{\delta^2} v_y = 0$ (1) avec $\delta = \sqrt{\frac{\eta_e T_0}{4\pi \rho_e}}$; de même $\frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{1}{\delta^2} v_x = 0$ (2).

23. On introduit une fonction complexe $\underline{v} = v_x + i v_y$. Alors (1) + i (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{d^2 v_x}{dz^2} + i \frac{d^2 v_y}{dz^2} \right) + \frac{1}{\delta^2} (v_y - i v_x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \underline{v}}{dz^2} - \frac{i}{\delta^2} \underline{v} = 0$.

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i}{\delta^2} = 0$ soit $r^2 - \frac{(1+i)^2}{2\delta^2} = 0$ d'où $r = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}\delta}$. La solution complexe est donc

$\underline{v}(z) = \underline{B} \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\delta} z\right) + \underline{C} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}\delta} z\right) = \underline{B} \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \exp\left(\frac{iz}{\sqrt{2}\delta}\right) + \underline{C} \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \exp\left(-\frac{iz}{\sqrt{2}\delta}\right)$. Or le second terme divergerait

lorsque $z \rightarrow -\infty$, donc $\underline{C} = 0$. Et en $z = 0$, $v_x(0) = v_0$ et $v_y(0) = 0$ donc $\underline{v}(0) = v_0 = \underline{B}$. Finalement : $v_x(z) = \text{Re}[\underline{v}(z)]$ soit

$$v_x(z) = v_0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right), \text{ et } v_y(z) = \text{Im}[\underline{v}(z)] \text{ soit } v_y(z) = v_0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right).$$

La rotation du vecteur vitesse est importante sous la surface, puis s'atténue avec la profondeur.