

Mc3 – Corrigé des exercices 2, 3 (fin), 4, 5, 6

□ Exercice 2

a) Équation locale de conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ ou encore $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$. Un écoulement incompressible est défini par $\frac{d\rho}{dt} = 0$, d'où $\boxed{\text{div} \vec{v} = 0}$.

b) $\|\text{div} \vec{v}\| \ll \frac{V}{L}$ équivaut à $\frac{1}{\rho} \left| \frac{d\rho}{dt} \right| \ll \frac{V}{L}$. Or $\left| \frac{d\rho}{dt} \right| \sim \frac{\mu}{\tau}$ donc on obtient $\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\mu}{\tau} \ll \frac{V}{L}}$.

c) L'équation de Navier-Stokes $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$ devient $\boxed{\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \approx -\text{grad} P}$ pour un écoulement parfait stationnaire où on néglige le poids. Donc $\frac{\rho V^2}{L} \sim \frac{P}{L}$ soit $\boxed{\rho V^2 \sim P}$.

d) Cette équation devient $\rho V^2 \sim \mu c^2$ soit $\frac{\mu}{\rho} \sim \frac{V^2}{c^2} = Ma^2$. Donc la condition $\frac{1}{\rho} \frac{\mu}{\tau} \ll \frac{V}{L}$ est équivalente à $\frac{Ma^2}{\tau} \ll \frac{V}{L}$. Enfin $V \sim \frac{L}{\tau}$ donc on trouve finalement $\boxed{Ma^2 \ll 1}$. Par exemple pour $V = 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $Ma = 0,1$ donc $Ma^2 = 0,01 \ll 1$.

□ Exercice 3 (fin)

On a trouvé en classe : $\vec{v}(M) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_z$ (profil des vitesses parabolique).

e) $D_V = \iint_S \vec{v}(M) \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \, r \, dr \, d\theta = \frac{\Delta P}{4\eta L} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^R (R^2 r - r^3) \, dr = \frac{\Delta P}{4\eta L} 2\pi \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R$ soit finalement

$$\boxed{D_V = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}}$$

f) Par analogie avec les résistances électrique $R = \frac{V_1 - V_2}{I_{1 \rightarrow 2}}$ et thermique $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}$, on peut définir la résistance hydraulique

$R_h = \frac{P_1 - P_2}{D_{V,1 \rightarrow 2}} = \frac{\Delta P}{D_V}$. Alors d'après les résultats précédents : $\boxed{R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}$. Comme les deux autres, elle est proportionnelle à la longueur

de la canalisation, en revanche elle n'est pas en $1/R^2$ (inversement proportionnelle à la section) mais en $1/R^4$: ainsi, si le rayon R est divisé par 2, la résistance hydraulique est multipliée par 16 : ce point est très important dans l'étude de la circulation sanguine.

□ Exercice 4

a) $\dim(a_0) = L$, $\dim(\rho) = M \cdot L^{-3}$ et $\dim(P_\infty) = F \cdot L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ donc $\dim(T) = L^\alpha \cdot M^\beta \cdot L^{-3\beta} \cdot M^\gamma \cdot L^{-\gamma} \cdot T^{-2\gamma}$.

On en déduit trois équations à trois inconnues : $\alpha - 3\beta - \gamma = 0$; $\beta + \gamma = 0$ et $-2\gamma = 1$. On obtient donc $\gamma = -1/2$, $\beta = 1/2$ et $\alpha = 1$, soit

finalement $\boxed{T = k a_0 \sqrt{\frac{\rho}{P_\infty}}}$. Pour une bulle de taille millimétrique : $a_0 \sim 10^{-3} \text{ m}$, $\rho \sim 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $P_\infty \sim 10^5 \text{ Pa}$ donc $\boxed{T \sim 10^{-4} \text{ s}}$.

b) L'incompressibilité se traduit par $\text{div} \vec{v} = 0$ soit $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} = 0$ donc $r^2 v_r = A(t)$ [valeur indépendante de r mais pouvant dépendre de t], soit $v_r(r, t) = \frac{A(t)}{r^2}$. La condition aux limites à l'infini $v_r(\infty, t) = 0$ est vérifiée pour toute valeur de $A(t)$. Pour la

trouver on utilise l'autre condition aux limites, à la surface de la bulle : $v_r(a(t), t) = \frac{da}{dt} = \frac{A(t)}{a(t)^2}$. Finalement : $\boxed{v_r(r, t) = \frac{a(t)^2}{r^2} \frac{da}{dt}}$.

c) $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi = \vec{0}$: l'écoulement est irrotationnel donc potentiel : il existe $\Phi(r, t)$ telle que $\vec{v} = \text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r$.

On identifie : $\frac{a(t)^2}{r^2} \frac{da}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ d'où $\Phi(r, t) = -\frac{a(t)^2}{r} \frac{da}{dt} + B$. La CL $\Phi(\infty, t) = 0$ donne $B = 0$, donc $\boxed{\Phi(r, t) = -\frac{a(t)^2}{r} \frac{da}{dt}}$.

d) Équation de Navier-Stokes sans terme de viscosité (ou équation d'Euler) : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \left(\text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \rho \vec{g}$

qui devient $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P \right) = \vec{0}$ pour un écoulement irrotationnel et en négligeant le poids.

On intègre sur une ligne de courant de $r = a(t)$ à $r \rightarrow \infty$: $\rho \int_{r=a}^{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \vec{v}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{OM} + \int_{r=a}^{r \rightarrow \infty} \text{grad} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P \right) \cdot d\vec{OM} = 0$

$\Leftrightarrow \rho \int_{r=a}^{r \rightarrow \infty} \left(\frac{a(t)^2}{r^2} \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{2a(t)}{r^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right) \cdot dr + \int_{r=a}^{r \rightarrow \infty} d \left(\rho \frac{v^2}{2} + P \right) = 0 \Leftrightarrow \rho \left[-\frac{a(t)^2}{r} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{2a(t)}{r} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right]_{r=a(t)}^{r \rightarrow \infty} + \left[\rho \frac{v^2}{2} + P \right]_{r=a(t)}^{r \rightarrow \infty} = 0$

$\Leftrightarrow \rho a(t) \frac{d^2 a}{dt^2} + 2\rho \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + P_\infty - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a(t) \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = -\frac{P_\infty}{\rho}}$.

e) $z = \left(\frac{da}{dt}\right)^2$ donc $\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dt} \times \frac{dt}{da} = 2 \frac{da}{dt} \frac{d^2a}{dt^2} \times \left(\frac{da}{dt}\right)^{-1} = 2 \frac{d^2a}{dt^2}$. L'équation précédente peut donc s'écrire : $a \frac{dz}{da} + 3z = -\frac{2P_\infty}{\rho}$.

On sépare les variables : $3 \frac{da}{a} = -\frac{dz}{z + 2P_\infty/3\rho}$. Et on intègre entre 0 et t : $3 \ln \frac{a(t)}{a_0} = -\ln \frac{z(t) + 2P_\infty/3\rho}{2P_\infty/3\rho} \Leftrightarrow \frac{z(t) + 2P_\infty/3\rho}{2P_\infty/3\rho} = \frac{a_0^3}{a(t)^3}$

$\Leftrightarrow a(t)^3 \left[\frac{2P_\infty}{3\rho} + \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \right] = a_0^3 \frac{2P_\infty}{3\rho}$ (car initialement la vitesse est nulle).

f) $\frac{da}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{a_0^3}{a(t)^3} - 1\right) \frac{2P_\infty}{3\rho}}$ (< 0 puisque la bulle implose). On sépare à nouveau les variables :

$dt = -\frac{da}{\sqrt{\left(\frac{a_0^3}{a^3} - 1\right) \frac{2P_\infty}{3\rho}}} = -\sqrt{\frac{3\rho}{2P_\infty}} da \sqrt{\frac{a^3}{a_0^3 - a^3}} = -\sqrt{\frac{3\rho}{2P_\infty}} a_0 dx \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}$ en posant $x = \frac{a(t)}{a_0}$. On intègre finalement entre $t = 0$ et $t = T$,

donc entre $x = 1$ et $x = 0$: $T = -\sqrt{\frac{3\rho}{2P_\infty}} a_0 \int_1^0 dx \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}} = a_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2P_\infty}} \times I$ soit $T = 0,74 a_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2P_\infty}}$. On a donc trouvé $k = 0,74 \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,91$.

□ Exercice 5

a) La fusée a perdu une masse Dt entre 0 et t , donc $m(t) = M + m_0 - Dt$. À l'instant t , toute cette masse est dans la fusée et sa quantité de mouvement est donc $\vec{p}(t) = [M + m_0 - Dt] \vec{v}(t)$. À l'instant $t + dt$, la masse $M + m_0 - Dt - Ddt$ restant dans la fusée a la vitesse $\vec{v}(t + dt)$, tandis que la masse Ddt éjectée a une vitesse $\vec{u} + \vec{v}(t + dt)$ (voir remarque) par rapport au référentiel terrestre (loi de composition des vitesses), donc $\vec{p}(t + dt) = [M + m_0 - Dt - Ddt] \vec{v}(t + dt) + Ddt [\vec{u} + \vec{v}(t + dt)] = [M + m_0 - Dt] \vec{v}(t + dt) + Ddt \vec{u}$.

Donc $d\vec{p} = [M + m_0 - Dt] \vec{v}(t + dt) + Ddt \vec{u} - [M + m_0 - Dt] \vec{v}(t)$ soit $d\vec{p} = [M + m_0 - Dt] d\vec{v} + Ddt \vec{u}$.

Remarque : pour la vitesse du bloc éjecté, on aurait pu prendre $\vec{u} + \vec{v}(t)$; dans ce cas on a un terme supplémentaire $Ddt d\vec{v}$, que l'on néglige car c'est un infiniment petit d'ordre 2.

b) TQM : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} \Leftrightarrow [M + m_0 - Dt] \frac{d\vec{v}}{dt} + D\vec{u} = [M + m_0 - Dt] \vec{g}$. L'accélération de la fusée est donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{D}{M + m_0 - Dt} \vec{u}$.

Remarque : le TQM peut s'écrire $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = m(t) \vec{g} - D\vec{u}$, ce qui fait apparaître une « force de poussée » $\vec{F} = -D\vec{u}$.

Pour que la fusée puisse décoller, il faut que $\vec{a}$ soit initialement orienté vers le haut, soit : $\ddot{z}(0) = -g + \frac{D}{M + m_0} u > 0$.

Avec les valeurs données : $\ddot{z}(0) = -9,8 + 400 \times 2500 / 55000 = +8,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} > 0$ donc la fusée peut bien décoller.

c) $\ddot{z}(t) = -g + \frac{D}{M + m_0 - Dt} u$ d'où $\dot{z}(t) = v(t) = -gt - u \ln[M + m_0 - Dt] + A$. CI : $v(0) = -u \ln[M + m_0] + A = 0$. Donc finalement :

$v(t) = -gt + u \ln\left(\frac{M + m_0}{M + m_0 - Dt}\right)$. On peut intégrer encore une fois (calcul lourd et non exigible !) avec la formule

$(f \ln f - f)' = f' \ln f$: $z(t) = -g \frac{t^2}{2} + \frac{u}{D} ([M + m_0 - Dt] \ln[M + m_0 - Dt] - [M + m_0 - Dt]) + ut \ln[M + m_0] + B$. On trouve finalement

B avec la CI : $z(0) = \frac{u}{D} ([M + m_0] \ln[M + m_0] - [M + m_0]) + B = 0$. Donc $z(t) = -g \frac{t^2}{2} - \frac{u}{D} [M + m_0 - Dt] \ln\left(\frac{M + m_0}{M + m_0 - Dt}\right) + ut$.

d) La combustion du carburant se termine à t_1 tel que $m(t_1) = m_0 - Dt_1 = 0$ soit $t_1 = \frac{m_0}{D}$. AN $t_1 = 125 \text{ s} = 2 \text{ min } 5 \text{ s}$.

Alors $v(t_1) = -g \frac{m_0}{D} + u \ln\left(1 + \frac{m_0}{M}\right)$. AN $t_1 = 4800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

□ Exercice 6

a) Dans un référentiel galiléen, pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, la quantité $Q = P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}$ garde une valeur constante le long d'une ligne de courant. Si l'écoulement est en plus irrotationnel, la valeur de Q est la même sur toutes les lignes de courant (donc dans tout le fluide).

Pour l'air $\rho \sim 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, et ici $z \sim 10 \text{ m}$ donc $\rho g z \sim 100 \text{ Pa}$ soit $\rho g z \ll P$.

b) Dans le référentiel de l'hélicoptère (galiléen), l'écoulement est stationnaire (sauf au voisinage des pales). Il y a alors conservation du débit massique de l'air le long du tube de courant représenté : $\rho V_0 S_0 = \rho V_2 S_2$. Sur le premier schéma : $S_0 > S_2$ donc $V_0 < V_2$. Sur le second schéma : $S_0 < S_2$ donc $V_0 > V_2$.

c) On peut appliquer le théorème de Bernoulli deux fois, au-dessus des pales puis au-dessous :

$P_0 + \rho g z_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} = P_1^+ + \rho g z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2}$ et $P_0 + \rho g z_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} = P_1^- + \rho g z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2}$. En soustrayant les deux on obtient :

$\rho g(z_0 - z_2) + \frac{\rho}{2}(V_0^2 - V_2^2) = P_1^+ - P_1^-$, et même $P_1^+ - P_1^- = \frac{\rho}{2}(V_0^2 - V_2^2)$ en négligeant l'effet du poids. Or pour que l'hélicoptère reste en vol, il faut avoir $P_1^+ - P_1^- < 0$, ce qui donne $V_0 < V_2$: le premier schéma est le bon.

d) On définit un système fermé à partir de la surface de contrôle Σ constituée par le tube de courant entre les sections 0 et 2 : à l'instant t , le système comporte la masse d'air dans Σ et la masse $D_m dt = \rho V_0 S_0 dt$ qui va entrer entre t et $t + dt$; à l'instant $t + dt$, il comporte la masse de fluide dans Σ et la même masse $\rho V_0 S_0 dt$ qui est sortie entre t et $t + dt$.

Bilan d'énergie cinétique : $\frac{E_c(t+dt) - E_c(t)}{dt} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_{\text{pression}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$. La puissance des forces intérieures est nulle pour un écoulement parfait. La puissance des forces de pression existe sur les deux sections où la vitesse de l'air est colinéaire aux forces de pression : $\mathcal{P}_{\text{pression}} = +P_0 S_0 V_0 - P_2 S_2 V_2$. Or $P_2 = P_0$ (hypothèse de l'énoncé), et $V_0 S_0 = V_2 S_2$ (conservation du débit), donc $\mathcal{P}_{\text{pression}} = 0$.

Enfin $E_c(t) = E_{c,\Sigma} + \frac{1}{2}(\rho V_0 S_0 dt) V_0^2$ et $E_c(t+dt) = E_{c,\Sigma} + \frac{1}{2}(\rho V_0 S_0 dt) V_2^2$. Le bilan donne donc : $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho V_0 S_0 (V_2^2 - V_0^2)$.

On ne connaît pas la section S_0 , mais on connaît $S_1 = \pi \ell^2$ (disque décrit par les pales), et par conservation du débit, $V_0 S_0 = V_1 S_1$.

Enfin en vol stationnaire, on peut supposer V_0 négligeable, ce qui donne $V_1 \approx \frac{V_2}{2}$ d'après la formule de l'énoncé. On trouve donc

finalement : $\mathcal{P} = 2\rho\pi\ell^2 V_1^3$.

e) Pour l'air dans les conditions usuelles, $\rho = \frac{MP}{RT} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Il reste à évaluer V_1 . Pour cela, les données restantes permettent de calculer le poids de l'hélicoptère, ce qui suggère de lui appliquer le PFD à l'équilibre : $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{F}_p$ où $\vec{F}_p$ est la force de portance, c'est-à-dire la résultante des forces exercées par le fluide sur l'hélicoptère, essentiellement sur ses pales. On peut alors écrire que la puissance $\mathcal{P}$ précédente, fournie par les pales au fluide, est la puissance de $-\vec{F}_p$, soit $\mathcal{P} = -\vec{F}_p \cdot \vec{V}_1 = F_p V_1$. Finalement : $V_1 = \frac{\mathcal{P}}{F_p} = \frac{\mathcal{P}}{mg}$.

On l'injecte dans la formule de la question précédente : $\mathcal{P} = 2\rho\pi\ell^2 \left(\frac{\mathcal{P}}{mg} \right)^3$, d'où $\mathcal{P} = \sqrt{\frac{(mg)^3}{2\rho\pi\ell^2}}$. AN $\mathcal{P} = 120 \text{ kW}$.

f) Cette dernière formule montre que pour un hélicoptère donné (masse et envergure fixées), la puissance à fournir est d'autant plus grande que la masse volumique de l'air est plus faible, donc que l'altitude est plus élevée. Ainsi, la puissance maximale que peut fournir le moteur de l'hélicoptère détermine une altitude maximale au-delà de laquelle il ne peut plus voler.