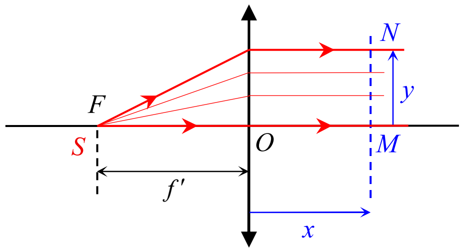
# Op1 – Corrigé des exercices 2, 3 et 5

## ¤ Exercice 2

a) *(Traitée en classe)* On a trouvé : $\boxed{(SM) = n_a(f'+x)+(n-n_a)e_0}$.

b) Le rayon émergent passant par $N$ est parallèle à l'axe, comme tous les rayons émergents, puisque la source (point objet réel) est au foyer principal objet. À première vue, on pourrait faire un calcul géométrique simple du chemin optique ($SN$), mais ce n'est pas le cas, car il y a une information cachée sur ce schéma simplifié : <u>on ne sait pas quelle est l'épaisseur de lentille traversée par ce rayon</u> ; on peut juste dire qu'elle est inférieure à $e_0$, puisqu'une lentille convergente est plus épaisse au centre. Pour contourner cette difficulté, on trace alors la surface d'onde passant par $N$ : elle est plane et orthogonale au faisceau de rayons parallèles, d'après le théorème de Malus.



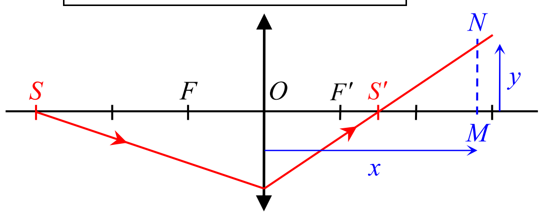

Donc $N$ est sur la même surface d'onde que $M$, d'où par définition de la surface d'onde : $\boxed{(SN) = (SM) = n_a(f'+x)+(n-n_a)e_0}$.

Le chemin optique ($SN$) semble pourtant nettement plus long que ($SM$) sur la figure, mais c'est parce qu'on ne « voit » que la partie dans l'air : la partie dans le verre est au contraire plus grande pour ($SM$), et ces deux effets se compensent exactement.

c) Pour $M$ sur l'axe, le raisonnement précédent reste entièrement valable : on trouve donc $\boxed{(SM) = n_a(3f'+x)+(n-n_a)e_0}$.

Pour $N$, cette fois le rayon émergent n'est plus parallèle à l'axe. Pour pouvoir tracer le rayon allant de $S$ à $N$, il faut d'abord trouver l'image de $S$, graphiquement ou bien en utilisant une formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OS'}}-\frac{1}{\overline{OS}}=\frac{1}{f'} \text{ d'où } \overline{OS'}=\frac{\overline{OS}\times f'}{\overline{OS}+f'}=\frac{-3f'\times f'}{-3f'+f'}=\frac{3}{2}f'.$$




On trace alors, en partant de la fin, le rayon émergent passant par $S$, $S'$ et $N$.

$(SN) = (SS')+(S'N)$ si $N$ est plus à droite que $S'$ $\left(x > \frac{3}{2}f'\right)$. On trouve géométriquement $(S'N) = n_a S'N = n_a\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}f'\right)^2+y^2}$.

Pour $(SS')$, chemin optique entre deux points conjugués, on peut utiliser n'importe quel rayon partant de $S$, qui passe ensuite forcément par $S'$, le chemin $(SS')$ étant indépendant du rayon choisi. Or le rayon réel est compliqué et inutilisable (toujours à cause de l'épaisseur inconnue de lentille traversée), mais il est très simple d'utiliser <u>comme autre rayon celui qui est confondu avec l'axe</u>, donnant le même calcul que pour $M$ : $(SS') = n_a\frac{9}{2}f'+(n-n_a)e_0$. Finalement : $\boxed{(SN) = n_a\left(\frac{9}{2}f'+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}f'\right)^2+y^2}\right)+(n-n_a)e_0}$.

Dans le cas où $N$ est plus à gauche que $S'$ $\left(\text{soit } x < \frac{3}{2}f'\right)$, la formule devient : $\boxed{(SN) = n_a\left(\frac{9}{2}f'-\sqrt{\left(\frac{3}{2}f'-x\right)^2+y^2}\right)+(n-n_a)e_0}$.

Dans les deux cas, si on prend $y = 0$ on retrouve bien le cas particulier $(SM)$.

## ¤ Exercice 3

a) $M$ et $H$ sont sur une même surface d'onde, plane et orthogonale à l'axe, puisque le faisceau de rayons émergents est un faisceau parallèle (image à l'infini). Donc $(FM) = (FKM) = (FOH) \Leftrightarrow FK+(n-1)e(r)+KM = d+(n-1)e_0$ (indice 1 pour l'air) soit $\sqrt{r^2+f'^2}+(n-1)e(r)+d-f' = d+(n-1)e_0$. Dans les conditions de Gauss : $r \ll f'$ d'où $\sqrt{r^2+f'^2} = f'\sqrt{1+\frac{r^2}{f'^2}} \approx f'\left(1+\frac{r^2}{2f'^2}\right)$

donc $f'+\frac{r^2}{2f'}+(n-1)e(r)+d-f' = d+(n-1)e_0$ d'où $\boxed{e(r) = e_0-\frac{r^2}{2(n-1)f'}}$.

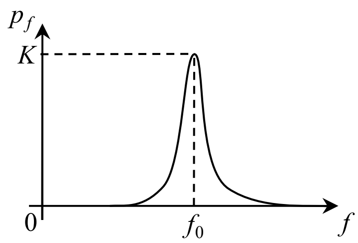
b) On considère maintenant les points $A$ et $A'$, entre lesquels tous les rayons donnent le même chemin optique.

$(AKA') = (AOA') \Leftrightarrow AK+(n-1)e(r)+KA' = AA'+(n-1)e_0 \Leftrightarrow \sqrt{OA^2+r^2}+(n-1)e(r)+\sqrt{OA'^2+r^2} = OA+OA'+(n-1)e_0$.

Comme précédemment, $\sqrt{OA^2+r^2} = OA\sqrt{1+\frac{r^2}{OA^2}} \approx OA\left(1+\frac{r^2}{2OA^2}\right) = OA+\frac{r^2}{2OA}$ et de même $\sqrt{OA'^2+r^2} \approx OA'+\frac{r^2}{2OA'}$.

L'équation devient donc : $OA+\frac{r^2}{2OA}+(n-1)e(r)+OA'+\frac{r^2}{2OA'} = OA+OA'+(n-1)e_0$. On simplifie par $OA$ et $OA'$ et on utilise le résultat précédent pour $e(r)$ : $\frac{r^2}{2OA}+\frac{r^2}{2OA'} = \frac{r^2}{2f'}$ soit $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'}$. Finalement on introduit les mesures algébriques : $\overline{OA'} = OA' > 0$ et $\overline{OA} = -OA < 0$, d'où la formule de Descartes $\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$.

¤ **Exercice 5**




a) L'allure de la fonction $p_f = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}f} = K\exp\left[-\left(\dfrac{f-f_0}{\Delta f}\right)^2\right]$ est donnée ci-contre : ce type de courbe est appelé *gaussienne*. $p_f$ est maximale en $f_0$, et tend vers 0 pour $|f-f_0| \gg \Delta f$.

La largeur du pic à mi-hauteur est donnée par : $\exp\left[-\left(\dfrac{f-f_0}{\Delta f}\right)^2\right] = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f = f_0 \pm \Delta f\sqrt{\ln 2}$

donc elle vaut $2\sqrt{\ln 2}\,\Delta f = 1{,}7\,\Delta f$. La valeur $\Delta f$ elle-même est la largeur du pic un peu plus haut (à une hauteur de 78 %).

La grandeur $\Delta f$ donne donc l'ordre de grandeur de la <u>largeur spectrale</u> de la source.

b) AN $\boxed{\dfrac{\Delta f}{f_0} = 1\cdot 10^{-6}}$.

c) $\ell_c = c\tau_c \sim \dfrac{c}{\Delta f_{\mathrm{exp}}}$ donc $\dfrac{\Delta f_{\mathrm{exp}}}{f_0} \sim \dfrac{c}{\ell_c f_0}$. AN $\boxed{\dfrac{\Delta f_{\mathrm{exp}}}{f_0} \sim 5\cdot 10^{-5}}$. La raie est donc nettement plus large que s'il n'y avait que l'effet Doppler : la cause principale de l'élargissement spectral est ici le <u>raccourcissement des trains d'ondes</u> par les <u>collisions entre les atomes</u>, dont la fréquence est liée notamment à la pression dans la vapeur.