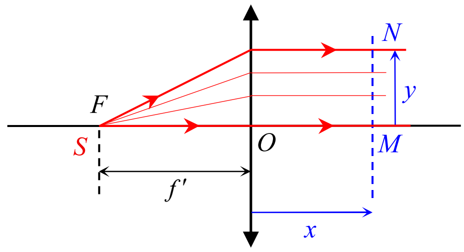
Op1 – Corrigé des exercices 2 et 3

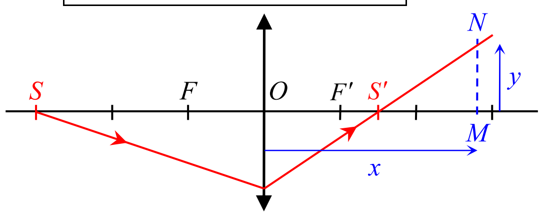
¤ Exercice 2

a) *(Traitée en classe)* On a trouvé : $\boxed{(SM)=n_a(f'+x)+(n-n_a)e_0}$.



b) Le rayon émergent passant par N est parallèle à l'axe, comme tous les rayons émergents, puisque la source (point objet réel) est au foyer principal objet. À première vue, on pourrait faire un calcul géométrique simple du chemin optique (SN), mais ce n'est pas le cas, car il y a une information cachée sur ce schéma simplifié : on ne sait pas quelle est l'épaisseur de lentille traversée par ce rayon ; on peut juste dire qu'elle est inférieure à e_0, puisqu'une lentille convergente est plus épaisse au centre. Pour contourner cette difficulté, on trace alors la surface d'onde passant par N : elle est plane et orthogonale au faisceau de rayons parallèles, d'après le théorème de Malus.
Donc N est sur la même surface d'onde que M, d'où par définition de la surface d'onde : $\boxed{(SN)=(SM)=n_a(f'+x)+(n-n_a)e_0}$.
Le chemin optique (SN) semble pourtant nettement plus long que (SM) sur la figure, mais c'est parce qu'on ne « voit » que la partie dans l'air : la partie dans le verre est au contraire plus grande pour (SM), et ces deux effets se compensent exactement.

c) Pour M sur l'axe, le raisonnement précédent reste entièrement valable : on trouve donc $\boxed{(SM)=n_a(3f'+x)+(n-n_a)e_0}$.



Pour N, cette fois le rayon émergent n'est plus parallèle à l'axe. Pour pouvoir tracer le rayon allant de S à N, il faut d'abord trouver l'image de S, graphiquement ou bien en utilisant une formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OS'}}-\frac{1}{\overline{OS}}=\frac{1}{f'} \text{ d'où } \overline{OS'}=\frac{\overline{OS}\times f'}{\overline{OS}+f'}=\frac{-3f'\times f'}{-3f'+f'}=\frac{3}{2}f'.$$

On trace alors, en partant de la fin, le rayon émergent passant par S, S' et N.

$(SN)=(SS')+(S'N)$ si N est plus à droite que S' $\left(x>\dfrac{3}{2}f'\right)$. On trouve géométriquement $(S'N)=n_a S'N=n_a\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}f'\right)^2+y^2}$.

Pour (SS'), chemin optique entre deux points conjugués, on peut utiliser n'importe quel rayon partant de S, qui passe ensuite forcément par S', le chemin (SS') étant indépendant du rayon choisi. Or le rayon réel est compliqué et inutilisable (toujours à cause de l'épaisseur inconnue de lentille traversée), mais il est très simple d'utiliser comme autre rayon celui qui est confondu avec l'axe, donnant le même calcul que pour M : $(SS')=n_a\dfrac{9}{2}f'+(n-n_a)e_0$. Finalement : $\boxed{(SN)=n_a\left(\dfrac{9}{2}f'+\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}f'\right)^2+y^2}\right)+(n-n_a)e_0}$.

Dans le cas où N est plus à gauche que S' $\left(\text{soit } x<\dfrac{3}{2}f'\right)$, la formule devient : $\boxed{(SN)=n_a\left(\dfrac{9}{2}f'-\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}f'-x\right)^2+y^2}\right)+(n-n_a)e_0}$.

Dans les deux cas, si on prend $y=0$ on retrouve bien le cas particulier (SM).

¤ Exercice 3

a) M et H sont sur une même surface d'onde, plane et orthogonale à l'axe, puisque le faisceau de rayons émergents est un faisceau parallèle (image à l'infini). Donc $(FM)=(FKM)=(FOH) \Leftrightarrow FK+(n-1)e(r)+KM=d+(n-1)e_0$ (indice 1 pour l'air) soit $\sqrt{r^2+f'^2}+(n-1)e(r)+d-f'=d+(n-1)e_0$. Dans les conditions de Gauss : $r\ll f'$ d'où $\sqrt{r^2+f'^2}=f'\sqrt{1+\dfrac{r^2}{f'^2}}\approx f'\left(1+\dfrac{r^2}{2f'^2}\right)$

donc $f'+\dfrac{r^2}{2f'}+(n-1)e(r)+d-f'=d+(n-1)e_0$ d'où $\boxed{e(r)=e_0-\dfrac{r^2}{2(n-1)f'}}$.

b) On considère maintenant les points A et A', entre lesquels tous les rayons donnent le même chemin optique.

$(AKA')=(AOA') \Leftrightarrow AK+(n-1)e(r)+KA'=AA'+(n-1)e_0 \Leftrightarrow \sqrt{OA^2+r^2}+(n-1)e(r)+\sqrt{OA'^2+r^2}=OA+OA'+(n-1)e_0$.

Comme précédemment, $\sqrt{OA^2+r^2}=OA\sqrt{1+\dfrac{r^2}{OA^2}}\approx OA\left(1+\dfrac{r^2}{2OA^2}\right)=OA+\dfrac{r^2}{2OA}$ et de même $\sqrt{OA'^2+r^2}\approx OA'+\dfrac{r^2}{2OA'}$.

L'équation devient donc : $OA+\dfrac{r^2}{2OA}+(n-1)e(r)+OA'+\dfrac{r^2}{2OA'}=OA+OA'+(n-1)e_0$. On simplifie par OA et OA' et on utilise le résultat précédent pour $e(r)$: $\dfrac{r^2}{2OA}+\dfrac{r^2}{2OA'}=\dfrac{r^2}{2f'}$ soit $\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OA'}=\dfrac{1}{f'}$. Finalement on introduit les mesures algébriques : $\overline{OA'}=OA'>0$ et $\overline{OA}=-OA<0$, d'où la formule de Descartes $\boxed{\dfrac{1}{\overline{OA'}}-\dfrac{1}{\overline{OA}}=\dfrac{1}{f'}}$.