

### Corrigé du devoir test de physique n° 3

**□ Problème A**

**Q1.** Une ligne de courant est une courbe tangente au champ de vitesse en chacun de ses points : c'est une notion eulérienne puisqu'elle fait appel à la notion de champ de vitesse.

**Q2.** Les quatre hypothèses permettent d'appliquer la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant :  $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte}$  (en négligeant l'effet du poids). Elles impliquent aussi la conservation du débit volumique : ainsi la vitesse est plus élevée là où les lignes de courant sont plus resserrées, c'est-à-dire au-dessus de l'aile. Alors la pression est plus faible au-dessus de l'aile qu'au-dessous, la résultante des forces de pression est donc orientée vers le haut, ce qui constitue une force de portance.

**Q3.** D'après les arguments précédents, le coefficient de pression est plus faible au-dessus de l'aile, or  $C_{P1}$  est plus faible que  $C_{P2}$  (attention, valeurs négatives en haut !) donc la courbe  $C_{P1}$  correspond à l'extrados,  $C_{P2}$  à l'intrados.

**Q4.** D'après la relation de Bernoulli sur une ligne de courant :  $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$  d'où  $\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = 1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}$  soit  $[C_P \leq 1]$ .

**Q5.**  $\dim C_z = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2 \cdot (M \cdot L^{-3}) \cdot (L \cdot T^{-1})^2}$  soit  $[\dim C_z = 1]$  : c'est bien une grandeur adimensionnée.

**Q6.** Le coefficient de portance augmente avec l'écart entre les coefficients de pression de l'extrados et de l'intrados : il est donc beaucoup plus grand sous l'incidence de 6°.

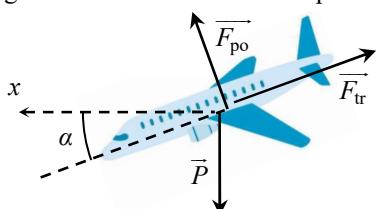
**Q8.** L'avion volant à vitesse constante, la somme de toutes les forces est nulle.

Le poids  $\vec{P}$  est compensé par la force de portance  $\vec{F}_z$  (qu'on notera  $\vec{F}_{po}$  dans la suite), et la force de traînée  $\vec{F}_x$  ( $F_{tr}$ ) est compensée par la force propulsive  $\vec{F}_{prop}$  exercée par les réacteurs.

**Q9.** À haute altitude, la masse volumique de l'air est plus faible. Pour garder la même portance (et ainsi compenser le poids), il faut garder le même produit  $\rho_\infty v_\infty^2$ , donc augmenter la vitesse.

Mais de cette façon on garde aussi la même valeur de la traînée, donc la même force propulsive : ainsi la même consommation de carburant permet d'aller plus vite. Par ailleurs, le vol en haute altitude permet de se placer au-dessus des nuages et ainsi d'éviter les intempéries ; et en cas d'accident, il donne plus de temps pour planer avant d'arriver au sol.

**Q10.** Cette fois il n'y a plus de force propulsive, donc  $\vec{F}_{tr} + \vec{F}_{po} + \vec{P} = \vec{0}$ .



Projection sur  $\vec{u}_x$  :  $F_{po} \sin \alpha - F_{tr} \cos \alpha = 0$  d'où  $\tan \alpha = \frac{F_{tr}}{F_{po}} = \frac{C_x}{C_z}$  soit  $[\tan \alpha = \frac{1}{f}]$ .

Quand l'avion perd une altitude  $d_V$ , il a avancé de  $d_H = \frac{d_V}{\tan \alpha} = f \cdot d_V$ . Ainsi la finesse indique la capacité de planer sur une longue distance avant de toucher le sol.

**Q17.** Le point  $F$  est un point d'arrêt pour la ligne de courant centrale.

**Q18.** Donc  $v_F = 0$ , et en  $G$  l'écoulement n'est plus perturbé donc on retrouve  $v_G = v_\infty$ . Le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant

de  $F$  s'écrit alors :  $P_F = P_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2$ . Et sur celle de  $G$  :  $P_G + \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2$  d'où  $[P_G = P_\infty]$ .

**Q19.** Le liquide, qu'on peut supposer incompressible, est à l'équilibre dans le tube :  $[P_H - P_I = \rho_l g h]$  (loi de l'hydrostatique).

**Q20.** Or  $P_F = P_H$  et  $P_G = P_I$  (air immobile dans le tube), d'où  $v_\infty = \sqrt{2 \frac{\rho_l}{\rho_\infty} g h}$ . Quand la vitesse augmente,  $h$  augmente.

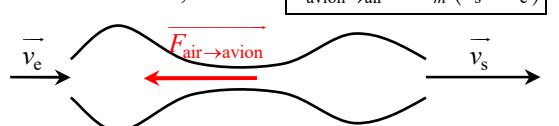
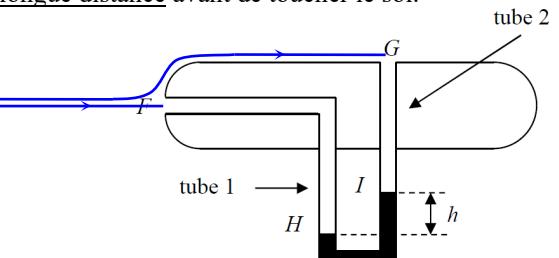
**Q25, 26.** La quantité de mouvement étant extensive :  $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_e \vec{v}_e$  et  $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s$ .

**Q27.**  $\frac{d \vec{p}^*(t)}{dt} = \frac{\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t)}{dt}$ . Or en régime stationnaire,  $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t)$  et  $\delta m_s = \delta m_e = D_m dt$ , donc  $\frac{d \vec{p}^*(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$ .

**Q28.** Le système est soumis à la force exercée par le réacteur (pièces mobiles et fixes) et aux forces de pression en entrée et en sortie exercées par les gaz extérieurs au système (le poids étant toujours négligé).

**Q29.** Théorème de la quantité de mouvement pour ce système fermé :  $\frac{d \vec{p}^*(t)}{dt} = \vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} + \vec{F}_{\text{p,e}} + \vec{F}_{\text{p,s}}$ . Les forces de pression, de sens opposés, se compensent au moins en partie. Si on néglige leur résultante devant la force du réacteur, il reste :  $[\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)]$ .

**Q30.**  $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{avion}} = -\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m (\vec{v}_e - \vec{v}_s)$  d'après le principe des actions réciproques. Pour que cette force soit propulsive, c'est-à-dire de sens opposé aux vitesses  $\vec{v}_e$  et  $\vec{v}_s$ , il faut que  $[\vec{v}_s > \vec{v}_e]$  (on éjecte les gaz brûlés à grande vitesse).



**□ Problème B**

**Q1.** À chaque battement, le cœur fait circuler un volume  $V_1 = 80 \text{ cm}^3$  de sang. En 1 minute, il y a  $N = 60$  battements, donc  $V = NV_1 = 4800 \text{ cm}^3 = 4,8 \text{ L}$ , ce qui correspond bien aux 5 litres attendus (avec un chiffre significatif).

**Q2.** Le côté droit fournit  $\mathcal{P}_d = 0,2 \text{ W}$ , tandis que le côté gauche fournit un travail  $P\Delta V = 16 \cdot 10^3 \times 80 \cdot 10^{-6} = 1,3 \text{ J}$  en 1 seconde environ, soit une puissance  $\mathcal{P}_g = 1,3 \text{ W}$ . Pour une masse  $m = 0,3 \text{ kg}$ , la puissance totale  $\mathcal{P}_{\text{tot}} = \mathcal{P}_d + \mathcal{P}_g = 1,5 \text{ W}$  correspond alors à une puissance massique  $p_m = \mathcal{P}_{\text{tot}}/m = 5 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**Q3.** Les 90 % restants correspondent, d'une part à de l'énergie absorbée par les cellules du muscle pour leur fonctionnement (réactions chimiques), d'autre part à un transfert thermique vers le reste du corps (qui contribue à le maintenir à 37 °C).

**Q4.** Le graphe donne une relation affine de la forme  $\log N = 10 - k \log a (\mu\text{m})$  avec  $k = \frac{10}{3,7} = 2,7$ , soit  $N = \frac{10^{10}}{a^{2,7}}$  ( $a$  en  $\mu\text{m}$ ).

**Q5.** Le débit volumique dans l'artère aorte est  $D_V = 80 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} = \pi \frac{d^2}{4} v$ , d'où  $v = \frac{4D_V}{\pi d^2}$ . AN  $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q6.** La différence de pression entre l'entrée de l'aorte et l'autre extrémité est justement ce qui met le sang en mouvement.

**Q7.** Terme  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  : produit de la masse volumique par l'accélération locale (liée au caractère non stationnaire de l'écoulement).

Terme  $\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v}$  : produit de la masse volumique par l'accélération convective (liée au caractère non uniforme de l'écoulement).

Terme  $\overline{f_{\text{vol}}}$  : densité volumique de forces (se réduisant généralement au poids volumique). Terme  $-\overline{\text{grad}} P$  : équivalent volumique des forces de pression. Terme  $\eta \Delta \vec{v}$  : équivalent volumique des forces de viscosité.

**Q8.** L'écoulement peut être considéré comme laminaire si le nombre de Reynolds  $Re = \frac{v D \rho}{\eta}$  est inférieur à une valeur critique de

l'ordre de  $10^3$ . On calcule ici :  $Re = \frac{1 \times 0,01 \times 1000}{10^{-3}} = 10^4 > 10^3$ , donc l'écoulement n'est pas laminaire dans l'aorte. Il peut l'être en revanche dans les vaisseaux beaucoup plus petits, ce qui justifie la suite de l'étude.

**Q9.** On suppose l'écoulement stationnaire :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ . De plus,  $(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v} = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} = v(r) \frac{\partial}{\partial x} v(r) \vec{e}_x = \vec{0}$  puisque  $v(r)$

et  $\vec{e}_x$  sont indépendants de  $x$ . Enfin on néglige les effets de la pesanteur, c'est-à-dire le terme  $\overline{f_{\text{vol}}}$ . Il reste donc :  $\overline{\text{grad}} P = \eta \Delta \vec{v}$ .

**Q10.** La face supérieure a une aire  $d\Sigma(r+dr) = (r+dr)d\theta \times dx$ , donc la force de viscosité exercée par le fluide situé au-dessus est

$d\vec{F}_+ = \eta \times (r+dr)d\theta \times dx \times \left( \frac{dv}{dr} \right)_{\text{en } r+dr} \vec{e}_x$ . De même,  $d\vec{F}_- = -\eta r d\theta \times dx \left( \frac{dv}{dr} \right)_{\text{en } r} \vec{e}_x$  est la force exercée par le fluide au-dessous de la

face inférieure, d'aire  $d\Sigma(r) = r d\theta dx$ . Résultante :  $d\vec{F}_{\text{visc}} = d\vec{F}_+ + d\vec{F}_- = \eta(r+dr)d\theta \times dx \times \left( \frac{dv}{dr} \right)_{\text{en } r+dr} \vec{e}_x - \eta r d\theta \times dx \left( \frac{dv}{dr} \right)_{\text{en } r} \vec{e}_x$

$= \eta d\theta dx \vec{e}_x \left[ (r+dr) \times \left( \frac{dv}{dr} \right)_{\text{en } r+dr} - r \left( \frac{dv}{dr} \right)_{\text{en } r} \right]$  soit  $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta d\theta dx \vec{e}_x \frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{dv}{dr} \right) \right] dr$ . Le volume élémentaire étant  $r dr d\theta dx$ ,

on obtient une densité volumique  $\overline{f_{\text{v,visc}}} = \eta \Delta \vec{v} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{dv}{dr} \right) \right] \vec{e}_x$ .

**Q11.** Projection de l'équation de Navier-Stokes sur  $\vec{e}_\theta$  :  $\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$  donc  $P$  est indépendante de  $\theta$  (ce qui correspond également à

l'invariance par rotation supposée pour le champ de vitesse). Projection sur  $\vec{e}_r$  :  $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$  donc  $P$  est indépendante de  $r$ .

Projection sur  $\vec{e}_x$  :  $\frac{dP}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{dv}{dr} \right) \right]$ . Ceci ne dépend pas de  $x$ , donc  $P$  est une fonction affine  $P(x) = Ax + B$ . CL :

$P(0) = B = P_A$  et  $P(L) = AL + P_A = P_B$  d'où  $A = \frac{P_B - P_A}{L}$  et finalement  $P(x) = \frac{P_B - P_A}{L} x + P_A$ . L'équation différentielle pour la

vitesse est alors :  $\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{dv}{dr} \right) \right] = \frac{P_B - P_A}{L} \Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{dv}{dr} \right) \right] = \frac{P_B - P_A}{L} \frac{r}{\eta}$ . On intègre une première fois :  $r \left( \frac{dv}{dr} \right) = \frac{P_B - P_A}{L} \frac{r^2}{2\eta} + C$

soit  $\frac{dv}{dr} = \frac{P_B - P_A}{L} \frac{r}{2\eta} + \frac{C}{r}$ . Une deuxième intégration donne alors :  $v(r) = \frac{P_B - P_A}{L} \frac{r^2}{4\eta} + C \ln r + D$ . CL :  $v(0)$  ne peut pas être infinie,

donc  $C = 0$ ; et  $v(a) = \frac{P_B - P_A}{L} \frac{a^2}{4\eta} + D = 0$  (fluide visqueux accrochant la paroi) d'où finalement  $v(r) = \frac{P_A - P_B}{4\eta L} (a^2 - r^2)$ .

**Q12.**  $D_V = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{P_A - P_B}{4\eta L} (a^2 - r^2) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x r dr d\theta = \frac{P_A - P_B}{4\eta L} \int_{r=0}^a (a^2 r - r^3) dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{P_A - P_B}{4\eta L} 2\pi \left[ \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^a$  soit

finalement  $D_V = \frac{P_A - P_B}{8\eta L} \pi a^4$ . Par analogie avec la résistance électrique  $R = \frac{V_A - V_B}{I_{A \rightarrow B}}$ , on peut définir une résistance hydraulique

$R_H = \frac{P_A - P_B}{D_V}$ . L'expression du débit donne alors ici  $R_H = \frac{8\eta L}{\pi a^4}$ .

**Q13.** Toujours par analogie électrocinétique, le réseau est constitué de  $N_a$  branches identiques en parallèle, chaque branche étant elle-même l'association d'une résistance  $R_{H,a}$  (artère) en série avec une association parallèle de  $N_c/N_a$  résistances  $R_{H,c}$  (capillaires).

Ainsi, la résistance globale est :  $R_{\text{tot}} = \frac{1}{N_a} \left( R_{H,a} + \frac{R_{H,c}}{N_c/N_a} \right) = \frac{R_{H,a}}{N_a} + \frac{R_{H,c}}{N_c}$  soit  $R_{\text{tot}} = \frac{8\eta}{\pi} \left( \frac{L_a}{N_a r_a^4} + \frac{L_c}{N_c r_c^4} \right)$ .

**Q14.** La paroi d'un vaisseau cylindrique a un volume  $2\pi r Le = 2\pi a r^2 L$  car  $e \ll r$ , donc  $V_0 = 2\pi a (N_a r_a^2 L_a + N_c r_c^2 L_c)$ .  $V_0$  étant minimal, sa différentielle est nulle :  $dV_0 = 0 = 2\pi a (N_a 2r_a dr_a L_a + N_c 2r_c dr_c L_c)$  d'où  $\frac{dr_c}{dr_a} = -\frac{N_a r_a L_a}{N_c r_c L_c}$ .

**Q15.** De même  $R_{\text{tot}}$  est minimale, donc  $dR_{\text{tot}} = 0 = \frac{8\eta}{\pi} \left( -\frac{4L_a dr_a}{N_a r_a^5} - \frac{4L_c dr_c}{N_c r_c^5} \right)$  d'où  $\frac{dr_c}{dr_a} = -\frac{L_a N_c r_c^5}{L_c N_a r_a^5}$ . Par identification avec la relation précédente :  $\frac{N_a r_a L_a}{N_c r_c L_c} = \frac{L_a N_c r_c^5}{L_c N_a r_a^5}$  soit  $N_a r_a^3 = N_c r_c^3$ , autrement dit  $N = \frac{\text{cte}}{a^3}$ .

**Q16.** La puissance de  $a$  trouvée expérimentalement est légèrement différente de cette valeur théorique (2,7 au lieu de 3), c'est-à-dire qu'il y a en réalité moins de petits vaisseaux que ce que prévoit la théorie ci-dessus. Cela peut s'expliquer par les hypothèses un peu trop simplificatrices du modèle : géométrie cylindrique, alors que les vaisseaux ont des formes plus complexes ; pesanteur négligée, alors qu'elle peut jouer un rôle notamment pour les vaisseaux verticaux ; paramètre  $\alpha$  uniforme, alors qu'il est certainement plus grand pour les petits vaisseaux (l'épaisseur de la paroi ne pouvant pas être inférieure à celle d'une cellule) ; modèle newtonien du sang, ce qui n'est plus valable pour des vaisseaux de petit diamètre ; modélisation laminaire, qui n'est peut-être pas valable dans les artères...

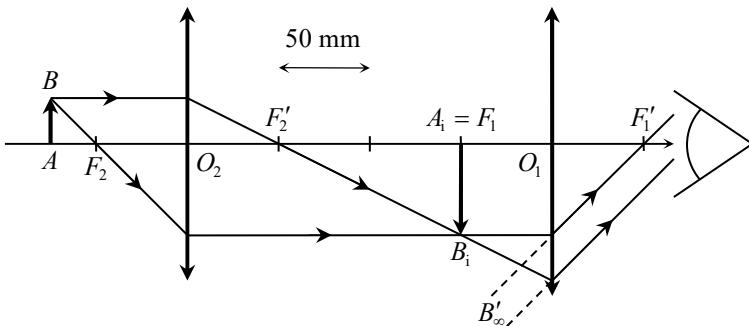
### Problème C

**Q1.** On règle l'oculaire de façon à observer sans accommoder. Pour un œil emmétrope, cela suppose d'avoir l'image finale à l'infini ( $A \xrightarrow{L_2} A_i = F_1 \xrightarrow{L_1} A'_\infty$ ) : le réticule doit donc se trouver dans le plan focal objet de l'oculaire, c'est-à-dire à la distance  $f'_1$ .

**Q2.** Formule de grandissement :  $\gamma_{\text{ob}} = \frac{F_2 O_2}{F_2 A}$  d'où  $\frac{F_2 A}{\gamma_{\text{ob}}} = F_2$ . AN  $F_2 A = -25 \text{ mm}$ .

**Q3.**  $O_2 O_1 = O_2 F'_2 + F'_2 F_1 + F_1 O_1 = f'_2 + F'_2 F_1 + f'_1$  et  $\gamma_{\text{ob}} = \frac{F'_2 F_1}{F'_2 O_2}$  d'où  $F'_2 F_1 = -\gamma_{\text{ob}} f'_2$  donc  $O_2 O_1 = f'_2 (1 - \gamma_{\text{ob}}) + f'_1$ . AN  $O_2 O_1 = 200 \text{ mm}$ .

**Q4.**



En prenant sur l'axe horizontal les deux distances trouvées ci-dessus, on vérifie bien que l'image intermédiaire est deux fois plus grande que l'objet, et se forme dans le plan focal objet de l'oculaire.

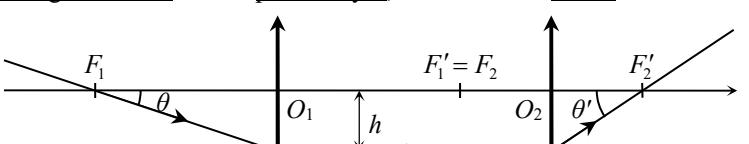
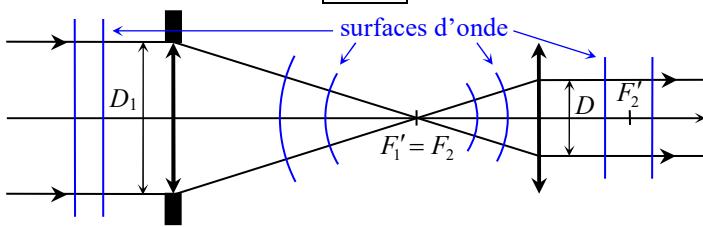
**Q5.** Un viseur à frontale fixe peut être utilisé sur un banc d'optique pour faire des mesures précises de distances entre objets difficiles à repérer : position d'une image virtuelle, épaisseur d'une lame de verre...

**Q6.** L'œil n'accorde pas si l'image finale est à l'infini, donc si l'image donnée par l'objectif est dans le plan focal objet de l'oculaire. L'objet étant à l'infini, il faut donc que  $F'_1$  et  $F_2$  soient confondus : alors la distance entre l'objectif et l'oculaire est  $O_1 O_2 = f'_1 + f'_2$ . Ce système optique donne d'un objet à l'infini une image à l'infini : il n'a pas de foyer, il est donc dit afocal.

**Q7.** Conditions de Gauss : les rayons doivent être peu inclinés par rapport à l'axe optique, et rencontrer le système au voisinage de l'axe.

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{h}{f'_1}, \quad \theta' \approx \tan \theta' = \frac{h}{f'_2} \text{ donc } G = \frac{f'_1}{f'_2}. \text{ AN } G = 50.$$

**Q8.**

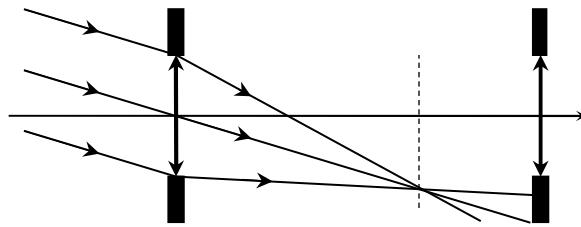


D'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons d'un faisceau. Elles sont donc planes au début et à la fin, et sphériques entre les lentilles.

$$\text{Théorème de Thalès : } \frac{D_1}{D} = \frac{f'_1}{f'_2} = G \text{ donc } D = \frac{D_1}{G}.$$

AN  $D = 2 \text{ mm}$ . On a trouvé  $D < D_2$ , donc la largeur du faisceau est limitée par l'objectif et non par l'oculaire.

**Q9.**



Lorsque l'angle  $\theta$  devient trop grand, les rayons ayant traversé l'objectif passent ensuite à côté de l'oculaire (ils arrivent sur sa monture) : l'objet correspondant n'est donc pas observable. Ainsi, c'est le diamètre de l'oculaire qui limite l'intervalle d'angles observables, c'est-à-dire le champ de vision, d'où l'expression « diaphragme de champ ». (Il y a aussi un problème pour les conditions de Gauss, mais ce n'était pas vraiment le sujet ici.)