Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 4

¤ **Problème A** (CCINP MP 2024)

Q6. a) Il s'agit de division de front d'onde, car le faisceau incident est séparé géométriquement en deux parties. Cela produit des interférences non localisées : la position de l'écran peut être quelconque.

b) On obtient $\boxed{\delta(M)=\dfrac{ax}{D}}$ *(voir cours)*. Formule de Fresnel : $I(M)=2I_1\left[1+\cos\left(\dfrac{2\pi\delta(M)}{\lambda}\right)\right]$ avec I_1 l'intensité de chaque onde.

Cela donne un maximum $I_{\max}=4I_1$, donc on peut réécrire : $\boxed{I(M)=\dfrac{I_{\max}}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right]}$.

Q7. a) Équation d'une frange : $p(M)=\dfrac{\delta(M)}{\lambda}=\text{cte}$ soit $x=\text{cte}$. Les franges sont donc rectilignes, orthogonales à (Ox) ; elles apparaissent à l'intérieur de la tache de diffraction donnée par les trous. L'interfrange est la période de la fonction $I(M)$: $\boxed{i=\dfrac{\lambda D}{a}=\dfrac{cD}{\nu a}}$.

b) Les fentes de Young se comportent comme un ensemble de paires de trous de Young accolées les unes aux autres. La différence de marche donnée par chaque paire de trous est la même en chaque point de l'écran, puisqu'elle ne dépend pas de y, donc toutes les figures d'interférences sont identiques, et elles se superposent par addition des intensités (sources incohérentes), d'où une plus grande luminosité. Ces franges s'inscrivent cette fois à l'intérieur de la figure de diffraction d'une fente.
Si on translate les fentes selon (Oy), les franges restent inchangées. Si on les translate selon (Ox), on translate de même les franges (puisque la frange d'ordre 0 est toujours équidistante des deux fentes).

Q8. a) Chaque bande spectrale d'intensité $\mathrm{d}I=J_\nu\,\mathrm{d}\nu=\dfrac{I_0}{\Delta\nu}\mathrm{d}\nu$ donne sa propre figure d'interférences, avec une intensité sur l'écran $\mathrm{d}I_{\text{écran}}(M)=2\,\mathrm{d}I\left[1+\cos\left(\dfrac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right]=2\dfrac{I_0}{\Delta\nu}\mathrm{d}\nu\left[1+\cos\left(\dfrac{2\pi ax\nu}{cD}\right)\right]$. Les différentes bandes spectrales sont incohérentes entre elles, donc leurs intensités s'ajoutent : $I(M)=\displaystyle\int_{\nu=0}^{+\infty}\mathrm{d}I_{\text{écran}}(M)=2\frac{I_0}{\Delta\nu}\int_{\nu=\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi ax\nu}{cD}\right)\right]\mathrm{d}\nu=2\frac{I_0}{\Delta\nu}\left(\Delta\nu+\left[\frac{cD}{2\pi ax}\sin\left(\frac{2\pi ax\nu}{cD}\right)\right]_{\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2}\right)$

$=2\dfrac{I_0}{\Delta\nu}\left(\Delta\nu+\dfrac{cD}{2\pi ax}\left[\sin\left(\dfrac{2\pi ax\nu}{cD}\left(\nu_0+\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)\right)-\sin\left(\dfrac{2\pi ax\nu}{cD}\left(\nu_0-\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)\right)\right]\right)$. On utilise la formule trigonométrique donnée :

$\sin\left(\dfrac{2\pi ax}{cD}\left(\nu_0+\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)\right)-\sin\left(\dfrac{2\pi ax}{cD}\left(\nu_0-\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)\right)=2\sin\left(\dfrac{2\pi ax}{cD}\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi ax}{cD}\nu_0\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)$ avec l'interfrange $i=\dfrac{\lambda_0 D}{a}=\dfrac{cD}{\nu_0 a}$. Alors $I(M)=2\dfrac{I_0}{\Delta\nu}\left(\Delta\nu+\dfrac{cD}{\pi ax}\sin\left(\dfrac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)\right)=2I_0\left(1+\dfrac{cD}{\pi ax\Delta\nu}\sin\left(\dfrac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)\right)$ soit finalement

$\boxed{I(M)=\dfrac{I_{\max}}{2}\left(1+\operatorname{sinc}\left(\dfrac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)\right)}$ en posant encore $I_{\max}=4I_0$. On a donc trouvé $\boxed{V(M)=\operatorname{sinc}\left(\dfrac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right)}$. C'est une fonction qui varie « lentement » par rapport au cosinus : celui-ci donne donc des oscillations d'intensité à l'intérieur d'une enveloppe constituée par le sinus cardinal.

b) Le contraste au voisinage de M est défini à partir des extrema locaux $I'_{\max}(M)$ et $I'_{\min}(M)$: $C(M)=\dfrac{I'_{\max}(M)-I'_{\min}(M)}{I'_{\max}(M)+I'_{\min}(M)}$.

En x tel que $V(M)>0$: $I'_{\max}(M)=\dfrac{I_{\max}}{2}(1+V(M))$ et $I'_{\min}(M)=\dfrac{I_{\max}}{2}(1-V(M))$ d'où $C(M)=V(M)$. En x tel que $V(M)<0$: $I'_{\max}(M)=\dfrac{I_{\max}}{2}(1-V(M))$ et $I'_{\min}(M)=\dfrac{I_{\max}}{2}(1+V(M))$ d'où $C(M)=-V(M)$. Globalement : $\boxed{C(M)=|V(M)|}$.

c) Les franges ne sont plus visibles quand le contraste s'annule. Or le premier zéro du sinus cardinal est obtenu pour $\dfrac{\pi ax\Delta\nu}{cD}=\pi$ soit $x=\dfrac{cD}{a\Delta\nu}$, soit une différence de marche $\delta=\dfrac{ax}{D}=\dfrac{c}{\Delta\nu}$, donc $\boxed{L=\dfrac{c}{\Delta\nu}=\dfrac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}}$. On vérifie, pour $\delta=L$, la variation de l'ordre $p=\dfrac{\delta}{\lambda}=\dfrac{L}{\lambda}$ entre le milieu du spectre (λ_0) et le bord ($\lambda_0+\Delta\lambda/2$) : $\Delta p=L\left(\dfrac{1}{\lambda_0}-\dfrac{1}{\lambda_0+\Delta\lambda/2}\right)=\dfrac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}\dfrac{\Delta\lambda/2}{\lambda_0(\lambda_0+\Delta\lambda/2)}\approx\dfrac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}\dfrac{\Delta\lambda/2}{\lambda_0^2}$ soit $\boxed{\Delta p=\dfrac{1}{2}}$, qui est le critère semi-quantitatif habituel.

d) $\boxed{\tau=\dfrac{1}{\Delta\nu}=\dfrac{L}{c}=\dfrac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda}}$.

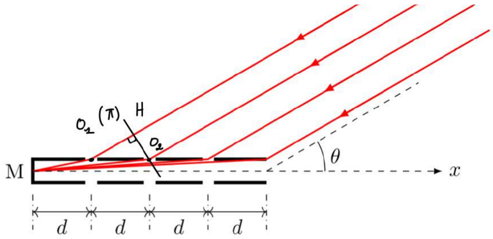
e) Les franges sont visibles tant que $|\delta|<L$, soit $|x|<\dfrac{LD}{a}$, donc sur une largeur $2x_{\max}=\dfrac{2LD}{a}$. Le nombre d'interfranges dans cet intervalle est : $N=\dfrac{2x_{\max}}{i}=\dfrac{2LD}{a}\dfrac{a}{\lambda_0 D}$ soit $\boxed{N=\dfrac{2L}{\lambda_0}}$.

f)

Source	λ_0 en nm	$\Delta\lambda$ en nm	τ en s	L en m	N
Laser He – Ne	632,991	0,001	$1\cdot10^{-9}$	$4\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{6}$
Raie rouge de l'hydrogène	656,2	0,1	$1\cdot10^{-11}$	$4\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{4}$
Lumière blanche filtrée	500	20	$4\cdot10^{-14}$	$1\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{1}$

¤ **Problème B** (Centrale-Supélec MPI 2025) *Corrigé rédigé par Marion BERTAGNOLIO (lycée Poincaré, Nancy)*

Q5.



Le plan (Π) est perpendiculaire aux rayons lumineux donc, d'après le théorème de MALUS, (Π) est un plan d'onde ; donc les ondes reçues sont en phase en O_2 et en H :

$$\varphi(H) = \varphi(O_2)$$

Or :

$$\underline{p}_1(M,t) = p_0\, e^{j\left((\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(HM) - \varphi(H)\right)} \qquad \text{et} \qquad \underline{p}_2(M,t) = p_0\, e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(O_2M) - \varphi(O_2)\right)}$$

Donc :

$$\underline{p}_2(M,t) = p_1(M,t)\, e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}((HM)-(O_2M))} = p_1(M,t)\, e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}(d\cos\theta + d - 2d)} = p_1(M,t)\, e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}(d(\cos\theta - 1))} = p_1(M,t)\, e^{-j\varphi}$$

soit

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(1-\cos\theta) = \boxed{\frac{2\pi f}{c_a} d(1-\cos\theta) = \varphi}$$

Q6. D'après l'énoncé : $I_{tot}(M) = |\underline{p}_{tot}(M,t)|^2 = \underline{p}_{tot}(M,t)\, \underline{p}_{tot}(M,t)^*$

Les ondes reçues sont cohérentes donc :

$$\underline{p}_{tot}(M) = \underline{p}_1(M,t) + \underline{p}_2(M,t) = \underline{p}_1(M,t)\left(1 + e^{-j\varphi}\right)$$

D'où :

$$|\underline{p}_{tot}(M,t)|^2 = |\underline{p}_1(M,t)|^2\ \left(1+e^{-j\varphi}\right)\left(1+e^{j\varphi}\right) = 2|\underline{p}_1(M,t)|^2\ (1+\cos\varphi) = 2I_0\ (1+\cos\varphi)$$

Soit :

$$\boxed{I_{tot}(M) = I_0\ (1+\cos\varphi)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_2(\varphi) = 2(1+\cos\varphi)}$$

On retrouver l'expression de la formule de FRESNEL obtenue dans le cas d'un phénomène d'interférences à 2 ondes.

Q7. On peut montrer comme à la question **Q.5** que : $\underline{p}_{n+1}(M,t) = \underline{p}_n(M,t)e^{-j\varphi}$ avec $\varphi = \dfrac{2\pi f}{c_a} d(1-\cos\theta)$.

Puis :

$$I_{tot}(M) = |\underline{p}_{tot}(M,t)|^2 = \underline{p}_{tot}(M,t)\, \underline{p}_{tot}(M,t)^*$$

avec

$$\underline{p}_{tot}(M,t) = \sum_{k=1}^{4} \underline{p}_k(M,t) = \underline{p}_1(M,t) \sum_{k=0}^{3} e^{-k\varphi} = \underline{p}_1(M,t)\, \frac{1-e^{-4j\varphi}}{1-e^{-j\varphi}} = \underline{p}_1(M,t)\, \frac{e^{-2j\varphi}}{e^{-j\varphi/2}} \frac{\sin(2\varphi)}{\sin(\varphi/2)}$$

d'où :

$$I_{tot}(M) = |\underline{p}_{tot}(M,t)|^2 = I_0\, \frac{\sin^2(2\varphi)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

or

$$\frac{\sin(2\varphi)}{\sin(\varphi/2)} = \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\sin(\varphi/2)} = \frac{4\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)\cos(\varphi)}{\sin(\varphi/2)} = 4\cos(\varphi/2)\cos(\varphi)$$

donc :

$$I_{tot}(M) = I_0 \times 4\cos^2(\varphi/2) \times 4\cos^2(\varphi) = I_0\,(1+\cos(\varphi))^2\,(1+\cos(2\varphi))^2$$

soit

$$\boxed{I_{tot}(M) = I_0\, f_2(\varphi) f_2(2\varphi)}$$

$f_2(\varphi)$ est 2π-périodique et $f_2(2\varphi)$ est π-périodique donc leur produit est 2π-périodique : $\boxed{\psi = 2\pi}$.

$I_{max} = I(0) = 16 = 4^2$: en $\varphi = 0[\psi = 2\pi]$ les ondes qui interfèrent sont **toutes en phase** donc l'amplitude de l'onde reçue est $4p_0$ d'où une intensité reçue 16 fois plus grande que l'intensité de l'onde incidente.

Q8. Lecture graphique : $I_{tot}/I_0 = 0,20$ pour $\varphi = \pi/3$ or $\varphi = \dfrac{2\pi f}{c_a} d(1-\cos\theta)$

donc

$$(1-\cos\theta_{max}) = \frac{c_a}{6\,f\,d}$$

On souhaite $\theta_{max} < \theta_0 = 5° = 9.10^{-2}$ rad $<< 1$ donc on peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 :

$$\theta_{max}^2 = \frac{c_a}{3\,f\,d} < \theta_0^2 \qquad \text{si} \qquad d > \frac{c_a}{3f\theta_0^2}$$

avec $c_a = 345\,\mathrm{m.s^{-1}}$, $1.10^{-2} \geqslant 1/f \geqslant 2.10^{-4}$ s et $\theta_0 = 9.10^{-2}$ rad impose $d \geqslant 2$ m.

Cette condition ne peut pas être vérifiée. Cette très grande valeur était prévisible car la longueur d'onde des ondes sonores évoquées est comprise en 6,9 cm et 3,5 m.

Cet ordre de grandeur n'est pas acceptable pour un microphone.