Exercices du chapitre Ém1

Distributions de charges et de courants

1. Distribution à symétrie sphérique
Une boule de rayon R et de centre O est chargée en volume avec une densité $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ (avec ρ_0 constante).

a) Représenter la courbe de la fonction $\rho(r)$, et calculer sa valeur moyenne $<\rho>$ sur l'intervalle $[0;R]$.

b) Déterminer la charge totale Q et la charge volumique moyenne ρ_m. Pourquoi trouve-t-on $\rho_m \neq <\rho>$?

2. Distribution de courants non uniforme
Un cylindre conducteur, de rayon R et de hauteur H, est parcouru par un courant de densité volumique non uniforme $\vec{j}(M,t) = A\sin(\omega t)\, r\, \overrightarrow{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques.

a) Représenter quelques lignes de courant sur un schéma.

b) Calculer l'intensité traversant une section rectangulaire du cylindre (hauteur H, largeur R allant de l'axe jusqu'au bord). Quelle est sa valeur efficace ?

Conducteur ohmique

3. Ordres de grandeur pour un métal
L'argent est le meilleur conducteur électrique, avec une conductivité $\gamma = 6{,}3\cdot 10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$ dans les conditions usuelles.

On donne sa masse volumique $\rho = 10{,}5\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, sa masse molaire $M = 108\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, ainsi que la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$, la masse de l'électron $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ et la charge élémentaire $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

a) En supposant que dans le métal, chaque atome d'argent perde un électron qui devient libre de circuler, déterminer la densité volumique d'électrons libres, notée n^*.

b) Énoncer la loi d'Ohm locale, et la démontrer en considérant comme particule un électron dont la vitesse s'identifie à la vitesse moyenne $\vec{v}$ de l'ensemble des électrons. En déduire l'expression de la conductivité en fonction de n^*, e, m_e et du temps moyen τ entre deux collisions.

c) Évaluer numériquement τ, et en déduire un critère de validité du modèle en régime variable.

d) Calculer numériquement la norme v de la vitesse moyenne (ou vitesse d'ensemble) des électrons en présence d'un champ électrostatique $E = 100\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

e) Comparer v à leur vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique, notée u, en supposant que les électrons se comportent comme les molécules d'un gaz parfait : $u = \sqrt{\dfrac{3RT}{M_e}}$.

On donne $R = 8{,}3\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, et on se placera à 25 °C.

f) Supposons qu'un fil d'argent soit soumis, d'une part au champ électrostatique précédent, d'autre part à un champ magnétostatique de norme B. Évaluer jusqu'à quelle valeur de B on peut négliger la force magnétique qui s'exerce sur les électrons devant la force électrique. Est-ce le cas pour le champ magnétique terrestre ?

4. Ordres de grandeur pour un semi-conducteur
Le germanium, de symbole Ge et de numéro atomique 32, est un solide semi-conducteur : la conduction y est assurée par des électrons libres et également par des *trous*, ou lacunes électroniques sur les atomes du réseau ayant libéré un électron (et qui sont donc devenus des ions Ge^+). Dans le germanium pur, les électrons libres et les trous ont donc la même densité, de valeur $n_0^* = 2{,}4\cdot 10^{19}\ \mathrm{m^{-3}}$. En présence d'un champ électrique $\vec{E}$, chaque type de particule acquiert une vitesse moyenne $\vec{v} = \mu\vec{E}$ en régime permanent, où μ est sa mobilité ; on donne $\mu_e = -0{,}39\ \mathrm{m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}}$ (électrons) et $\mu_t = 0{,}19\ \mathrm{m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}}$ (trous). La constante d'Avogadro est $\mathcal{N}_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$, la charge élémentaire $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

a) Calculer la proportion d'atomes ionisés dans le germanium pur. On donne $M = 72{,}6\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $\rho = 5320\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

b) Déterminer la conductivité du germanium pur.

Le *dopage* d'un semi-conducteur consiste à y introduire des atomes d'un autre élément, susceptible d'apporter des électrons libres supplémentaires (dopage de type N) ou bien des trous supplémentaires (dopage de type P).
On peut par exemple réaliser un dopage de type N du germanium en y introduisant des atomes d'arsenic (As, numéro atomique 33), qui viennent se substituer à des atomes de germanium dans le réseau cristallin (de type diamant). Chaque atome As fournit un électron libre ; les électrons ainsi obtenus s'ajoutent à ceux provenant de l'ionisation d'atomes Ge (dont la quantité ne change pas).

c) Justifier le fait que chaque atome As apporte un électron.

d) Interpréter le fait que la densité des électrons libres et celle des trous vérifient toujours la relation : $n_e^* \times n_t^* = n_0^{*2}$.

e) Pour un dopage à l'arsenic dans lequel un atome Ge sur un million est remplacé par un atome As, déterminer les densités d'électrons et de trous. En déduire la conductivité du germanium dopé.

5. Conductivité complexe en régime variable
On considère un conducteur dont les porteurs de charges libres, de charge individuelle q et de masse m, ont une densité volumique n^*. On le soumet à un champ électrique uniforme mais variable, d'expression $\vec{E}(t) = \overrightarrow{E_m}\cos(\omega t)$.

a) En utilisant le modèle de Drude, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ (vitesse moyenne ou d'ensemble) des porteurs de charges.

b) En régime permanent sinusoïdal, on cherche une expression de la vitesse sous la forme complexe $\underline{\vec{v}}(t) = \underline{\vec{V}}\exp(j\omega t)$. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{\vec{V}}$, et en déduire, par analogie avec le cas stationnaire, l'expression d'une conductivité complexe $\underline{\gamma}$. Vers quelles valeurs tend $\underline{\gamma}$ en basse fréquence et en haute fréquence ?

☞ *Réponses partielles*

1. b) $\rho_m = \dfrac{2}{5}\rho_0$. **2.** b) $I(t) = A\sin(\omega t)\dfrac{HR^2}{2}$.

3. a) $n^* = 5{,}85\cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$. c) $\tau = 3{,}8\cdot 10^{-14}\ \mathrm{s}$. **4.** b) $\gamma = 2{,}2\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$.