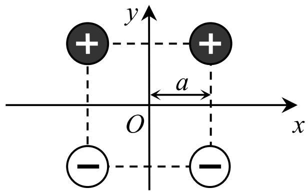
Exercices du chapitre Ém2

Calcul de champ par sommation et symétries

1. Distribution discrète

Quatre charges ponctuelles de même valeur absolue q (deux positives et deux négatives) sont disposées dans le plan (Oxy), aux quatre sommets d'un carré de côté $2a$ centré en O.



a) Calculer le champ électrostatique au point O.
b) Donner la direction du champ électrostatique en un point A de l'axe (Ox), en un point B de l'axe (Oy) et en un point C de l'axe (Oz). Préciser, pour chaque composante obtenue, si c'est une fonction paire ou impaire de la coordonnée.
c) Sur un schéma en perspective, dessiner l'allure des lignes de champ, en tenant compte des résultats précédents.

2. Champ et potentiel créés par un cercle chargé

On considère un cercle de centre O, de rayon R dans le plan (Oxy). Il est chargé avec une densité *linéique* de charge $\lambda(P)$.
a) Écrire les formules intégrales de calcul du champ et du potentiel électrostatiques créés par une distribution linéique.

On suppose tout d'abord que la densité linéique de charge est une constante λ_0 uniforme et positive.
b) Par analyse des symétries, simplifier l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M de l'axe (Oz).
c) Faire alors le calcul intégral du champ. Représenter graphiquement sa norme en fonction de z.
d) Faire le calcul intégral du potentiel $V(M)$ créé en un point M de l'axe (Oz), en prenant l'origine à l'infini. Vérifier la compatibilité avec la formule du champ.

On suppose maintenant que la densité est $\lambda(P) = +\lambda_0$ sur le demi-cercle tel que $x > 0$ et $\lambda(P) = -\lambda_0$ sur l'autre demi-cercle.
e) Déterminer comme précédemment le champ électrostatique créé en un point M de l'axe, et le représenter graphiquement.
f) Faire le calcul intégral du potentiel. Pourquoi ne peut-on pas vérifier ici la relation entre le champ et le potentiel ?

Théorème de Gauss et superposition

3. Champ d'un cylindre infini

Un objet cylindrique de rayon R et d'axe (Oz) est chargé avec une densité volumique uniforme ρ. Pour simplifier, on considère que la longueur de l'objet selon (Oz) est infinie.
a) À quelles conditions cette modélisation est-elle valide ?
b) D'après les symétries et invariances, simplifier l'expression du champ électrostatique créé en tout point M de l'espace.
c) Appliquer le théorème de Gauss à une surface bien choisie, et en déduire l'expression du champ, à l'extérieur du cylindre puis à l'intérieur. Quelle est la forme des lignes de champ ?
d) Déterminer le potentiel électrostatique $V(M)$, à l'intérieur puis à l'extérieur, en prenant l'origine sur l'axe (Oz). Quelle est la forme des surfaces équipotentielles ?

4. Condensateur sphérique

Un condensateur sphérique est constitué de deux sphères de même centre O. La plus petite sphère (de rayon R_1) porte une charge $-Q$ uniformément répartie sur sa surface ; la plus grande (de rayon $R_2 > R_1$) porte la charge $+Q$ uniformément répartie sur sa surface.
a) Déterminer le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par cette distribution de charges. (Il n'est pas nécessaire d'utiliser la superposition de deux distributions.)
b) En déduire le potentiel en tout point de l'espace.
c) Déterminer la capacité C de ce condensateur.
d) Dans le cas où la distance séparant les armatures est faible devant leurs rayons, on pose $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$. Donner alors une expression approchée de C, en fonction de ε_0, e et S (surface de chacune des armatures). Commenter le résultat.

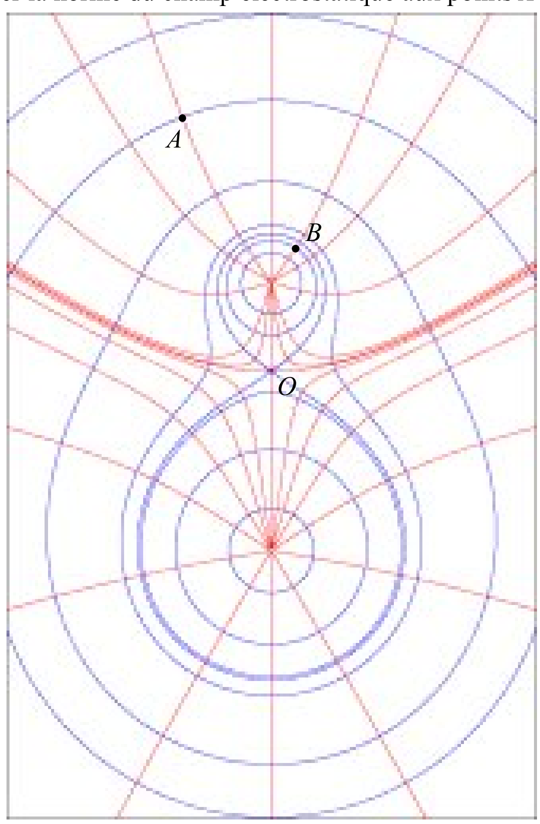
5. Champ dans une cavité

Une boule de centre O_1 et de rayon a, portant la charge volumique uniforme ρ, possède une cavité sphérique de centre O_2 et de rayon b, vide de charges.
a) Déterminer le champ dans cette cavité, en utilisant le résultat du cours pour la boule uniforme. Quelle est sa propriété remarquable ?
b) Que se passe-t-il si les centres O_1 et O_2 sont confondus ? Vérifier alors la compatibilité avec le théorème de Gauss.

Topographie du champ et du potentiel

6. Lecture d'une carte de champ

La figure ci-dessous représente un réseau de lignes de champ électrostatique, ainsi que les intersections avec le plan de figure de quelques surfaces équipotentielles.
a) Identifier les courbes représentant des lignes de champ et celles représentant des équipotentielles.
b) Déterminer les positions et signes des charges ponctuelles créant ce champ, et orienter les lignes de champ. Préciser où se trouve la charge la plus grande (en valeur absolue).
c) On suppose qu'entre deux équipotentielles consécutives, la différence de potentiel est de 10 V (sans tenir compte de celle passant par le point O), et que cette figure est à l'échelle 1. Évaluer la norme du champ électrostatique aux points A et B.



☞ *Réponses partielles*

1. b) $\vec{E}(A) = E_y(x)\vec{e_y}$, paire. **2.** c) $\vec{E} = \dfrac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\dfrac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e_z}$. **3.** c) $\vec{E}(M_{\text{ext}}) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$. **5.** a) $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$.