<u>Ém2 – Corrigé des exercices 4 et 5</u>

¤ Exercice 4

a) La distribution de charges est à symétrie sphérique, donc on trouve comme d'habitude : $\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}}$ en coordonnées sphériques. On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r : $\oiint_C \vec{E}(M)\cdot\vec{n_s}\,\mathrm{d}s = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

Le flux vaut $E_r(r)4\pi r^2$ (vu en cours).

Pour $r < R_1$: $Q_{\text{int}} = 0$, donc $E_r(r)4\pi r^2 = 0$, soit $\boxed{\vec{E}(M) = \vec{0}}$. Pour $R_1 < r < R_2$: $Q_{\text{int}} = -Q$, donc $E_r(r)4\pi r^2 = \dfrac{-Q}{\varepsilon_0}$, soit $\boxed{\vec{E}(M) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}}$. Enfin pour $r > R_2$: $Q_{\text{int}} = -Q + Q = 0$, donc $\boxed{\vec{E}(M) = \vec{0}}$.

Le champ électrostatique est confiné entre les deux armatures. Il est discontinu au passage de chaque armature.

b) $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}$ ici. Pour $r < R_1$: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0$ d'où $V(r) = A = \text{cte}$. On choisit l'origine des potentiels (masse) par exemple sur l'armature intérieure, c'est-à-dire en $r = R_1$: alors la constante est nulle, $\boxed{V(r) = 0 \text{ pour } r < R_1}$. Pour $R_1 < r < R_2$: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ d'où $V(r) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + B$. Le potentiel est continu, donc nul en $r = R_1^+$ d'où $\boxed{V(r) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \text{ pour } R_1 < r < R_2}$.

Pour $r > R_2$: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0$ d'où $V(r) = \text{cte} = V(R_2)$ [toujours par continuité] soit $\boxed{V(r) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \text{ pour } r > R_2}$.

c) Par définition : $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{Q}{V(R_2) - V(R_1)} = \dfrac{Q}{V(R_2)}$ soit $\boxed{C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$.

e) $R_2 - R_1 = e$ et $R_1 R_2 \approx R_1^2$ donc $C \approx \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{e}$. Or $4\pi R_1^2$ est l'aire S de l'armature intérieure, qui est pratiquement la même que celle de l'armature extérieure. On a donc trouvé $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$ qui est <u>la même formule que pour un condensateur plan</u> : la courbure des armatures ne change pas l'expression de la capacité, dès lors que l'épaisseur du condensateur est faible devant le rayon de courbure.

¤ Exercice 5

a) La distribution de charges n'a pas assez de symétries pour qu'on puisse trouver le champ avec le théorème de Gauss.
Mais elle est équivalente à la superposition de deux distributions : une boule de centre O_1 et de rayon a, portant la charge volumique uniforme ρ, sans cavité ; et une boule de centre O_2 et de rayon b, portant la charge volumique uniforme $-\rho$. On peut alors utiliser le principe de superposition, connaissant le champ à l'intérieur d'une boule uniforme (vu en cours, § 3b) : en effet, un point M de la cavité (dans la distribution réelle) se trouve à l'intérieur de chacune des deux boules (dans la distribution équivalente).

$\vec{E}(M) = \vec{E_1}(M) + \vec{E_2}(M) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M} + \dfrac{-\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$ soit $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}}$. On constate que le champ est <u>uniforme dans la cavité</u>, ce qui n'était pas prévisible avec les éléments de symétrie.

b) Si O_1 et O_2 sont confondus, le <u>champ est nul dans la cavité</u>.
Dans ce cas, la distribution est à <u>symétrie sphérique</u> et on peut alors appliquer un autre résultat du cours, obtenu avec le théorème de Gauss : $\vec{E}(M) = \dfrac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$. Puisque $Q_{\text{int}}(r) = 0$ en tout point de la cavité, on trouve bien un champ nul.
