

Devoir test de physique n° 5

Cet énoncé comporte deux problèmes. Durée : 4 heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Problème 1 Condensateur et supercondensateur

Voir formules et valeurs en fin d'énoncé

A / Condensateur plan à symétrie de révolution

On considère le condensateur plan de la figure suivante.

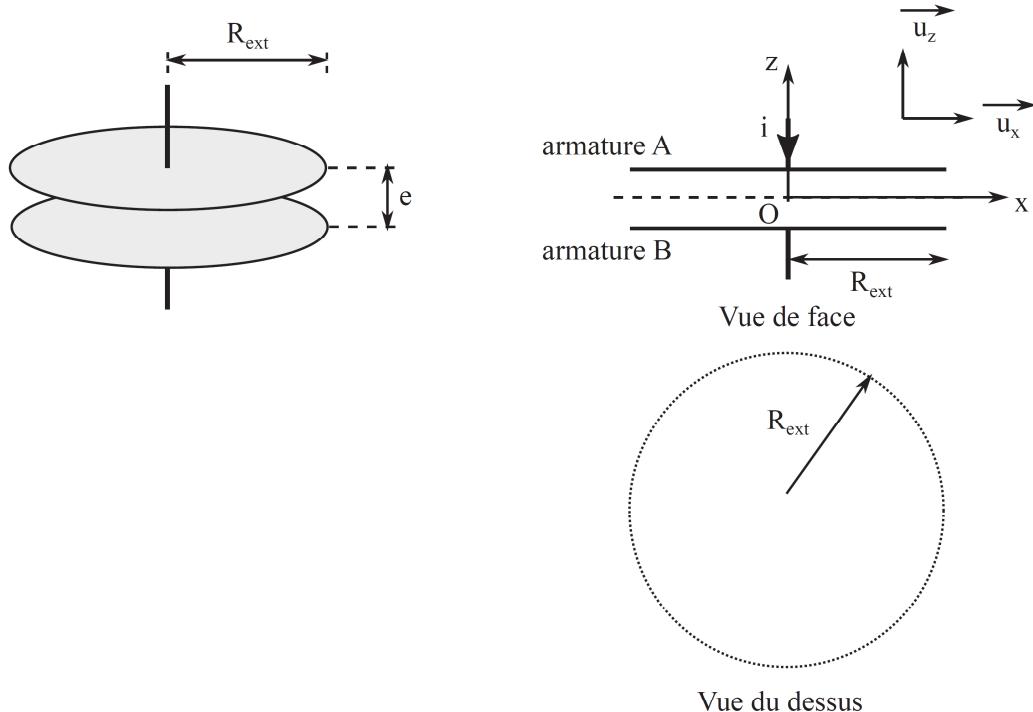


FIGURE 1 – Condensateur plan à symétrie de révolution

Ses armatures sont des disques conducteurs de rayon R_{ext} séparés par un diélectrique de permittivité relative ϵ_r et d'épaisseur e . D'un point de vue électrique, le diélectrique se comporte comme le vide à condition de remplacer la permittivité du vide ϵ_0 par la permittivité du milieu $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ dans les formules utilisées.

Les armatures A et B sont soumises respectivement à un potentiel électrique \mathcal{V}_A et \mathcal{V}_B . On note Q_A la charge électrique de l'armature A et $Q_B = -Q_A$ celle de l'armature B.

On suppose que le champ électrique $\overrightarrow{E(M)}$ est orienté selon l'axe \vec{u}_z et qu'il est uniforme à l'intérieur du diélectrique.

Les armatures étant d'épaisseur négligeable, elles seront donc considérées confondues avec les plans d'équation $z = -\frac{e}{2}$ et $z = +\frac{e}{2}$. On adoptera un modèle de plan uniformément chargé en surface pour les décrire.

- A1. Justifier très simplement que les armatures d'un condensateur ont des charges électriques de signes opposés.
- A2. Donner une condition sur R_{ext} et e permettant d'assimiler les armatures à deux plans infinis.

On s'intéresse dans un premier temps uniquement à l'armature supérieure, supposée seule et dans le vide.

- A3. Justifier avec soin que le champ électrique créé en tout point par cette armature peut s'écrire $\overrightarrow{E_A(M)} = E_A(z) \vec{u}_z$.
 - A4. On pose $z' = z - \frac{e}{2}$. Exprimer $E_A(-z')$ en fonction de $E_A(z')$. On justifiera la réponse.
 - A5. En utilisant le théorème de Gauss, établir alors l'expression du champ électrique créé en tout point de l'espace par l'armature en fonction de Q_A , R_{ext} et ϵ_0 .
- On prendra le soin de distinguer les cas $z > \frac{e}{2}$ et $z < \frac{e}{2}$.

On considère maintenant l'ensemble des deux armatures séparées par le diélectrique de permittivité ϵ .

A6. *Donner l'expression du champ électrique créé en tout point de l'espace par cette distribution.* On distinguerá trois zones de l'espace.

A7. *Donner l'expression du potentiel électrostatique $\mathcal{V}(z)$ à l'intérieur du diélectrique en fonction de R_{ext} , Q_A et z .*

On prendra comme référence des potentiels électriques $\mathcal{V}(z=0)=0$.

A8. *Montrer alors que la capacité C de ce condensateur est donnée par la formule :*

$$C = \epsilon \frac{\pi \cdot R_{ext}^2}{e}$$

On suppose le condensateur initialement déchargé et que l'on soumet à une différence de potentiel $U = \mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B$.

A9. *Démontrer que l'énergie électrique stockée dans le condensateur a pour expression : $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot U^2$*

On souhaite réaliser un condensateur avec un diélectrique composé de polypropylène de permittivité relative $\epsilon_r = 2$. Afin d'éviter un claquage (destruction du diélectrique suite à l'application d'un champ électrique trop important), on se restreint à un champ électrique $E_{max} = 70 \text{ MV.m}^{-1}$.

A10. *Quelle est la densité volumique maximale d'énergie électrique que l'on peut stocker ?* On supposera le volume des armatures négligeable.

A11. *Quelle doit être l'épaisseur e du diélectrique pour une différence de potentiel $U_{max} = 350 \text{ V}$?*

A12. *Quel doit être le rayon R_{ext} du condensateur pour une capacité $C = 1,0 \mu\text{F}$? Commenter brièvement le résultat obtenu.*

B / Mesure de la capacité d'un condensateur

On souhaite dans cette partie mesurer expérimentalement la capacité C d'un condensateur. Une méthode consiste à soumettre le dipôle { condensateur de capacité C + conducteur ohmique de résistance R } série à un échelon de tension et d'analyser la réponse temporelle de ce dipôle à cette excitation. Le condensateur est initialement déchargé et le conducteur ohmique a pour résistance $R = 1,00 \pm 0,01 \text{ k}\Omega$.

À l'instant de date $t = 0$, le dipôle (RC) est soumis à une tension constante E . Un système d'acquisition permet d'enregistrer tous les $\Delta t = 0,10 \text{ ms}$ la tension u_C aux bornes du condensateur.

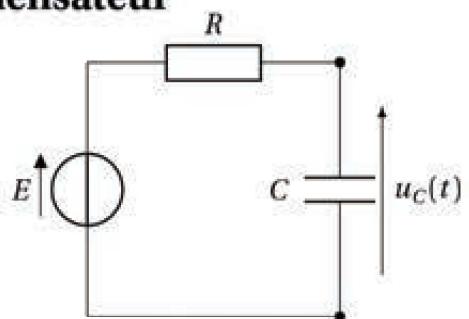


FIGURE 2 – Circuit d'étude

On obtient le graphe $u_{C,exp} = f(t)$ suivant. La courbe de réponse obtenue permet raisonnablement de suggérer un comportement du premier ordre.

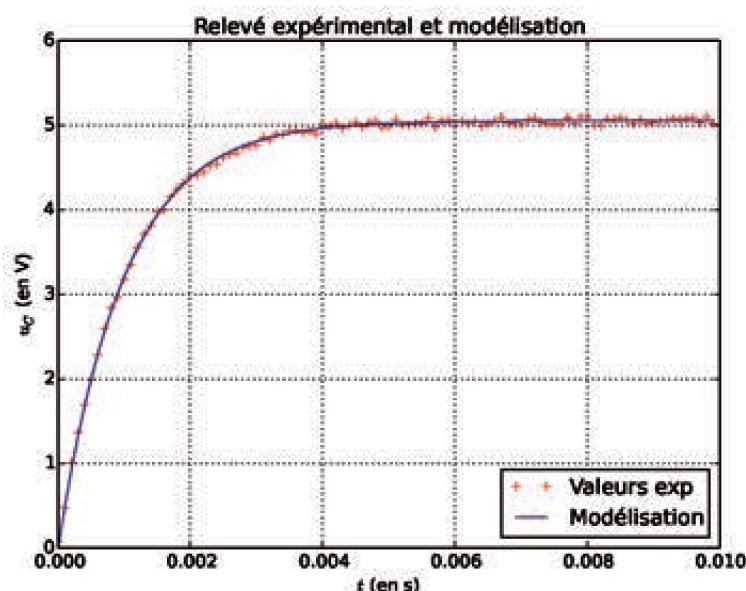


FIGURE 3 – Relevé expérimental et modélisation

B1. Établir l'équation différentielle satisfait par u_C et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}$$

B2. Comment nomme-t-on τ ? Quelle est sa signification physique?

B3. (*) Déterminer à l'aide du relevé expérimental fourni une estimation de τ et de E . Bien expliciter le raisonnement suivi.

B4. En déduire alors une estimation de la capacité C du condensateur.

C / Matrice de supercondensateurs

Document 1 : Présentation des supercondensateurs

L'utilisation d'un système de stockage d'énergie est souvent nécessaire pour les applications de type traction électrique. Le composant de stockage est utilisé :

- dans les systèmes isolés où il alimente des dispositifs demandant une énergie réduite ;
- dans les systèmes hybrides où il joue un rôle en terme d'apport de puissance ou d'énergie selon l'application (par exemple : phases de freinage ou d'accélération) ;

Jusqu'à présent, les systèmes les plus utilisés sont les accumulateurs qui ont une puissance spécifique et une autonomie relativement élevées. Les condensateurs classiques ont une autonomie insuffisante,



FIGURE 4 – Un supercondensateur de capacité $C = 3,0 \cdot 10^3$ F commercialisé par le fabricant Maxwell

mais possèdent une puissance spécifique incomparable. Les supercondensateurs apparaissent comme des composants intermédiaires en terme de propriétés énergétiques qui les rendent très intéressants car ils n'ont pratiquement pas de concurrents dans ce domaine.

Si on veut accroître la capacité de stockage d'un condensateur, il faut augmenter la permittivité relative ϵ_r du diélectrique et/ou le rapport $\frac{S}{e}$ (S désignant la surface des armatures et e la distance séparant les deux armatures.)

Le principe de base des supercondensateurs est lié à la valeur élevée du rapport $\frac{S}{e}$. Ainsi, les charges électriques se trouvent localisées sur des surfaces très importantes (électrodes poreuses) et à des distances très faibles (principe de la double couche électrochimique) où apparaissent les ions de l'électrolyte et les charges opposées de l'électrode.

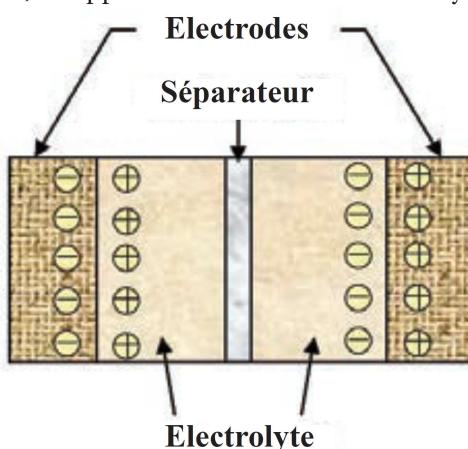


FIGURE 5 – Double couche électrochimique au sein d'un supercondensateur

On s'intéresse ici à une modélisation rudimentaire d'un supercondensateur. Dans un premier temps sera étudié le profil du potentiel électrique $\mathcal{V}(z)$ à l'intérieur du diélectrique. Nous proposerons ensuite un « modèle électrocinétique » d'un supercondensateur. Enfin, une étude expérimentale permettra la détermination des paramètres du « modèle électrocinétique ».

Considérons alors le profil de densité volumique de charge $\varrho(z)$ à l'intérieur du diélectrique suivante :

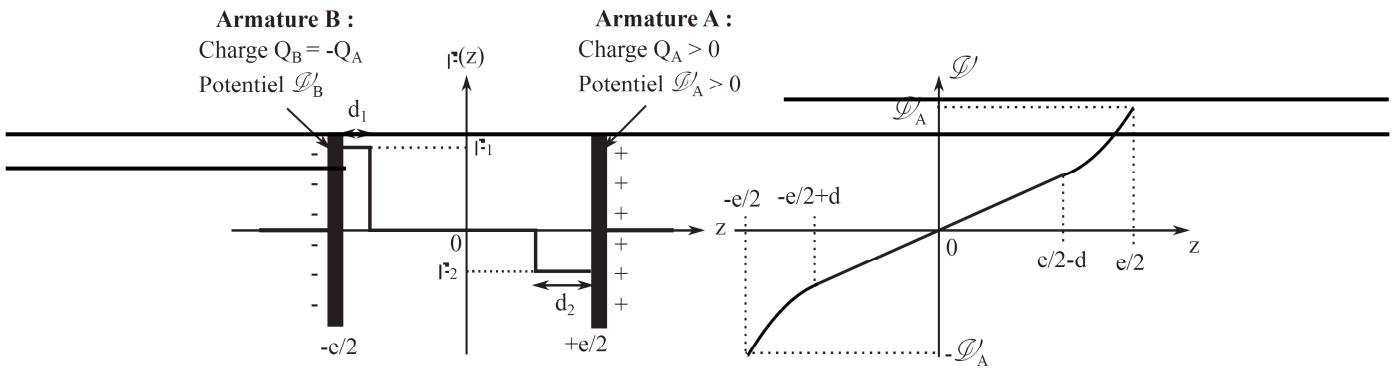


FIGURE 6 – Distribution de charge à l'intérieur du diélectrique. Les charges à l'intérieur du diélectrique sont localisées sur les épaisseurs d_1 et d_2 . Graphe de la fonction $\mathcal{V} = f(z)$.

C1. Donner une relation entre ϱ_1 , ϱ_2 , d_1 et d_2 en la justifiant.

C2. Montrer que le potentiel électrique à l'intérieur du supercondensateur satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\mathcal{V}}{dz^2}(z) + \frac{\varrho(z)}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = 0$$

C3. Justifier la forme linéaire ou parabolique des différentes parties du graphe du potentiel $\mathcal{V} = f(z)$. Afin de simplifier les calculs, on considérera que $d_1 = d_2 = d$ et que $\mathcal{V}_B = -\mathcal{V}_A$.

Notations et valeurs numériques :

Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Permittivité relative	ε_r
Champ électrique en M	$\vec{E}(M)$
Densité surfacique de charge	σ_Q

Potentiel électrostatique et champ électrostatique :

$$\mathcal{V}_N - \mathcal{V}_M = - \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Une formule d'analyse vectorielle :

On considère le champ scalaire suivant : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} f)$$

Problème 2 Oscillateur quasi sinusoïdal

Cet oscillateur sera construit autour d'un filtre et d'un montage amplificateur. Ces deux blocs fonctionnels sont tout d'abord étudiés séparément.

C.II.1. Étude du filtre

Sur la Figure F9 on donne le schéma d'un filtre. On note $H_F(\omega)$ sa fonction de transfert.

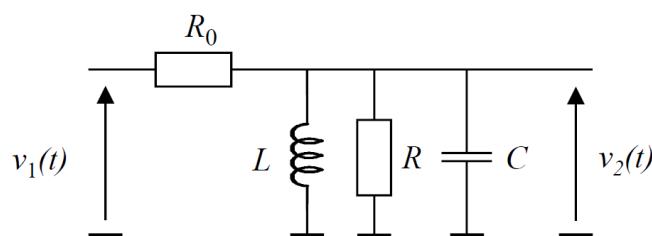


Figure F9. Schéma du filtre.

Q45. Déterminer l'expression de $\underline{H}_F(\omega)$ et la mettre sous la forme $\underline{H}_F = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left[x - \frac{1}{x} \right]}$ avec

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 \text{ étant la pulsation propre du filtre.}$$

Expliciter littéralement Q_F , H_0 et la fréquence caractéristique f_0 .

Q46. Donner l'expression reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à - 3 dB.

On choisit $R_0 = 470 \Omega$, $R = 120 \Omega$, $L = 50 \mu\text{H}$ et $C = 50 \text{nF}$ de sorte que : $H_0 \approx 0,2$, $f_0 \approx 100 \text{kHz}$ et $Q_F \approx 3$.

Q47. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel G_{dB} en fonction de $\log(x)$; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la "bande passante à - 3 dB".

C.II.2 Étude de l'amplificateur

On considère deux structures possibles à placer en sortie du filtre pour amplifier le signal (Figures F10 et F11). Le circuit U1 est un amplificateur linéaire intégré supposé idéal.

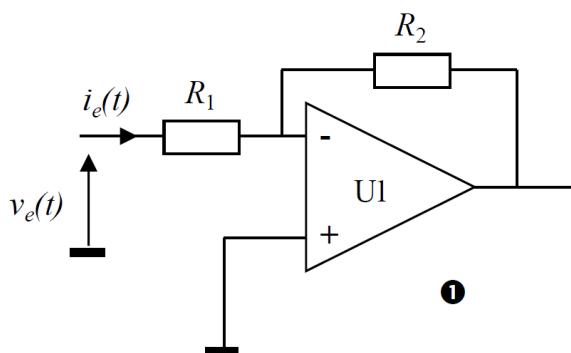


Figure F10. Structure amplificatrice n°1.

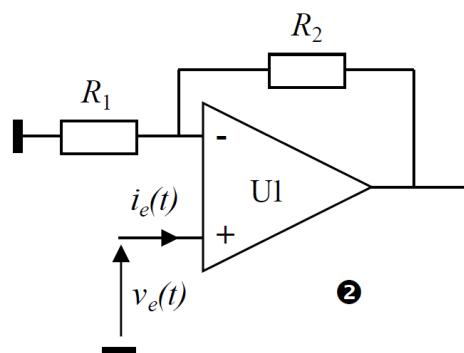


Figure F11. Structure amplificatrice n°2.

Q48. Déterminer, en précisant bien les hypothèses faites, les fonctions de transfert de ces deux structures, notées respectivement \underline{A}_1 et \underline{A}_2 .

Q49. Déterminer les impédances d'entrée Z_{e1} et Z_{e2} de chaque montage et expliquer pourquoi la structure n°2 est a priori un meilleur choix pour l'application envisagée.

Q50. En déduire alors l'expression de la fonction de transfert globale du montage associant les deux blocs fonctionnels filtre puis amplificateur en la mettant sous la forme $\underline{H}_{FA} = \frac{H_1}{1 + jQ \left[x - \frac{1}{x} \right]}$; expliciter H_1 et Q .

C.II.3 Étude des oscillations

On associe maintenant les deux blocs en connectant la sortie du montage amplificateur à l'entrée du filtre, réalisant le système dont le schéma est donné Figure F12.

La sortie de l'amplificateur U1, toujours supposé dans un premier temps comme idéal, est connectée à l'entrée du filtre au travers d'un interrupteur K.

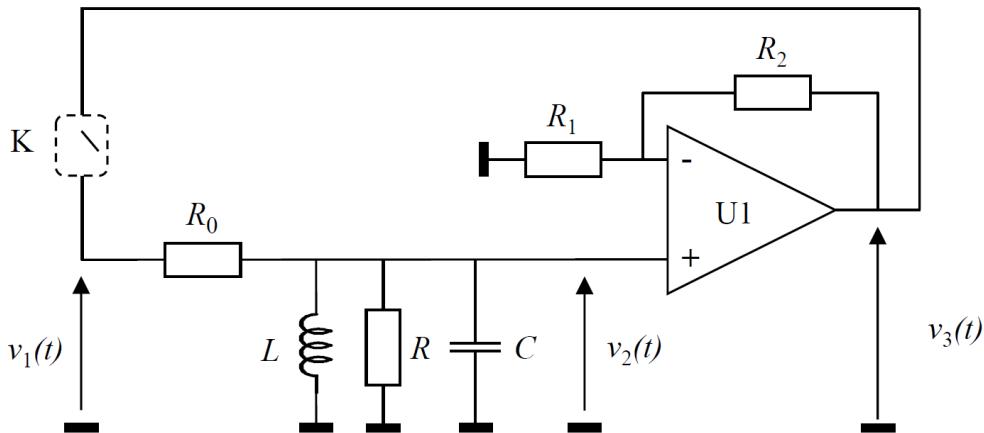


Figure F12. Structure bouclée associant le filtre et l'étage amplificateur.

À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K, le condensateur C étant déchargé.

Q51. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $v_3(t)$; on fera apparaître dans cette équation la pulsation propre, le facteur de qualité et le gain maximal.

On désire obtenir à la fermeture de l'interrupteur des oscillations pseudo-périodiques d'amplitude croissante.

Q52. À quelle condition sur H_1 cela sera-t-il possible ?

Q53. Que vaut la fréquence d'oscillation pendant la phase de démarrage ?

Q54. À quelles conditions la fréquence des oscillations peut-elle être considérée comme égale à la pulsation propre du filtre ?

Q55. En considérant d'une part l'étude précédente, et d'autre part le fait que le circuit U1 n'est pas idéal expliquer pourquoi il est préférable que le gain de l'étage amplificateur ne soit pas trop grand.

C.II.4.2 Réalisation d'une inductance

On considère une bobine de longueur l_B comportant N_{sp} spires jointives de section S_B .

Une expression approchée de l'inductance d'une bobine est la suivante : $L_{sp} = \frac{\mu_0 N_{sp}^2 S_B}{l_B}$.

On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m⁻¹.

Cette inductance peut par exemple être fabriquée avec du fil de cuivre, enrobé d'un isolant. On pourrait choisir par exemple un fil de référence AWG-38, correspondant, selon la norme américaine ASTM-B258 très largement utilisée même en Europe, à un diamètre $d_{Cu} = 101 \mu\text{m}$. L'isolant a une épaisseur $t_i = 7,5 \mu\text{m}$. La conductivité du cuivre est $\sigma_{Cu} = 5,88 \times 10^7 \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. Les valeurs numériques sont seulement données à titre d'exemple.

Le rôle de l'isolant est d'éviter que les spires jointives ne se court-circuent entre elles.

Q58. Quelle est l'expression littérale de la résistance de la bobine en fonction des grandeurs déjà introduites ?

Q59. Expliquer pourquoi on peut considérer que deux spires adjacentes forment un condensateur.

On considère trois spires successives, Sp1, Sp2 et Sp3 comme indiquées sur la Figure F14. On appelle C_i la capacité d'un condensateur formé par deux spires adjacentes.

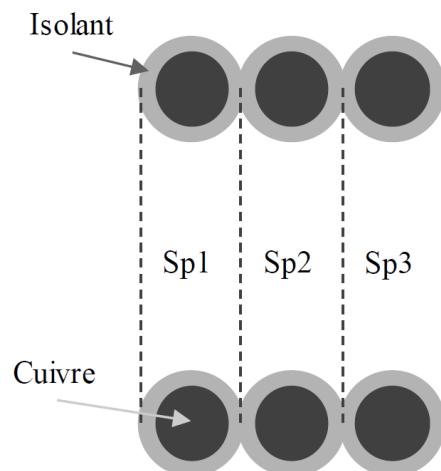


Figure F14. Trois spires adjacentes, Sp1, Sp2 et Sp3.

Q60. En considérant comment sont placés les condensateurs formés par {Sp1-Sp2} d'une part et {Sp2-Sp3} d'autre part, déterminer la capacité résultant de l'ensemble des spires.

Q61. Comment tenir compte de ce condensateur, que l'on peut qualifier de "parasite", dans un nouveau schéma équivalent complet de la bobine.

Q62. Quelles sont les conséquences de la présence de ce condensateur parasite ?

C.II.5 Stabilité de l'oscillateur

La stabilité d'un oscillateur est un critère fondamental de sa qualité, qu'il est indispensable de prendre en compte selon la précision nécessaire pour une application. On considère en général la stabilité à court-terme et la stabilité à long-terme.

C.II.5.1 Oscillateur quasi-sinusoidal

On considère (Figure F12) le schéma théorique de l'oscillateur, avec K fermé. On suppose qu'il fonctionne en régime permanent et pour simplifier on fait l'hypothèse que l'oscillateur est de type quasi-sinusoidal. Les signaux $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ sont alors considérés comme sinusoïdaux, on peut donc raisonner dans l'espace des fréquences et noter les signaux \underline{V}_1 , \underline{V}_2 et \underline{V}_3 en représentation complexe.

Le filtre (entrée \underline{V}_1 , sortie \underline{V}_2) a pour fonction de transfert \underline{H}_F .

L'amplificateur (entrée \underline{V}_2 , sortie \underline{V}_3) a pour fonction de transfert \underline{A} .

Q63. Exprimer \underline{V}_2 en fonction de \underline{V}_1 , \underline{V}_3 en fonction de \underline{V}_2 et \underline{V}_1 en fonction de \underline{V}_3 . En déduire une relation entre \underline{A} et \underline{H}_F valable s'il y a effectivement oscillation. Cette relation est appelée condition d'oscillation.

Q64. Montrer que la condition d'oscillation conduit à la relation $\text{Arg}[\underline{H}_F(\omega)] = 0$.

C.II.5.2 Stabilité à court-terme

On suppose maintenant qu'en sortie de l'amplificateur il y a une petite fluctuation de phase, exprimée par le gain de l'amplificateur $\underline{A}' = A_0 e^{j\delta\psi}$ où A_0 est un réel positif.

Q65. Quelle est la nouvelle condition d'oscillation relative à la phase de $\underline{H}_F(\omega)$?

On considère que la fluctuation de phase $\delta\psi$ induit une fluctuation $\delta\omega$ de la pulsation d'oscillation, petite par rapport à la pulsation propre. On pourra donc écrire que $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ dans l'expression de \underline{H}_F sous forme canonique.

Q66. Déduire, à partir de la condition d'oscillation et de l'expression de \underline{H}_F simplifiée grâce à l'hypothèse précédente, l'expression de la variation $\delta\omega$ de la pulsation. Calculer alors la fluctuation de fréquence pour $\delta\psi = 1^\circ$.

Q67. Que se passe-t-il si la fluctuation $\delta\psi$ varie au cours du temps mais avec une amplitude faible ? Quel serait alors l'aspect du spectre du signal de l'oscillateur ?

Q68. Conclure sur la façon d'améliorer la qualité de l'oscillateur.
