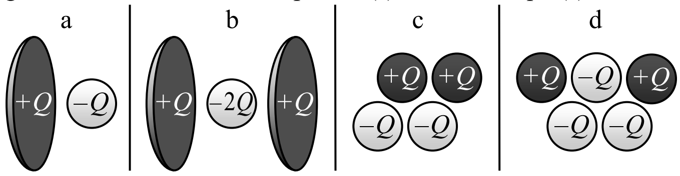
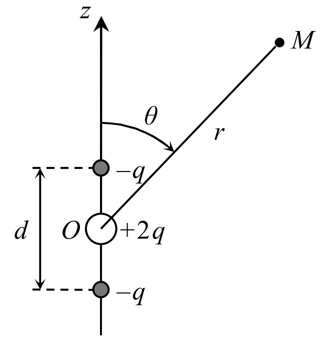
Exercices du chapitre Ém3

Distributions dipolaires ou autres

1. Nature d'une distribution
Chacune des quatre distributions ci-dessous est constituée de charges électriques réparties uniformément sur des sphères ou sur des disques, et dont les valeurs sont indiquées.
Indiquer laquelle/lesquelles de ces quatre distributions, vues à grande distance, est/sont dipolaire(s) électrostatique(s).



2. Distribution quadrupolaire



a) Calculer le premier terme non nul (terme quadrupolaire) du potentiel électrostatique créé en M, à grande distance r, par la distribution $(-q,+2q,-q)$ représentée sur le schéma.
b) En déduire le champ électrostatique en M.
c) Représenter sur un schéma l'allure des surfaces équipotentielles, en déterminant d'abord la nature géométrique de l'équipotentielle $V = 0$. Ajouter quelques lignes de champ.

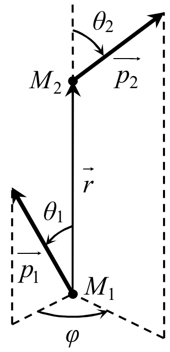
Actions subies par un dipôle

3. Interaction d'une charge et d'un dipôle
Une charge positive Q étant immobile en O, un dipôle de moment $\vec{p}$ est placé en un point M à la distance r de O, $\vec{p}$ ayant la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$.
Calculer de deux manières différentes la force qui s'exerce sur le dipôle. Vérifier le sens du vecteur obtenu.

4. Énergie d'interaction de Keesom
Pour un gaz constitué de molécules polaires, on cherche à décrire l'interaction entre deux molécules isolées, pour en déduire ensuite l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux molécules.
On considère deux molécules identiques, modélisées par deux dipôles électriques rigides de moments $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$, situés respectivement aux points M_1 et M_2.

On note $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = r\,\overrightarrow{e_r}$ et $p = \left\|\overrightarrow{p_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{p_2}\right\|$.

a) Exprimer le potentiel et le champ créés au point M_2 par le dipôle $\overrightarrow{p_1}$. En déduire l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ du système formé par les deux dipôles, en fonction notamment des vecteurs $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ et $\vec{r}$.
On définit les orientations relatives des vecteurs $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ et $\vec{r}$ à l'aide des paramètres angulaires θ_1, θ_2 et φ définis sur la figure ci-dessous : θ_1 est l'angle entre $\vec{r}$ et $\overrightarrow{p_1}$, θ_2 l'angle entre $\vec{r}$ et $\overrightarrow{p_2}$ et φ est l'angle entre les plans $\left(M_1, M_2, \overrightarrow{p_1}\right)$ et $\left(M_1, M_2, \overrightarrow{p_2}\right)$.



b) Exprimer $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ en fonction de p, r, θ_1, θ_2 et φ.
c) Donner les ordres de grandeur de p et de r ; en déduire celui de $\mathcal{E}_\mathrm{p}$. Comparer à l'énergie cinétique moyenne par molécule à une température de 20 °C et commenter.
Si les orientations relatives de $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ et $\vec{r}$ étaient indépendantes, la moyenne de $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ sur toutes les orientations possibles serait nulle. En fait la probabilité de trouver les dipôles dans une configuration donnée, au sein du système en équilibre thermodynamique à la température T, s'écrit :

$$\mathrm{d}P = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{\mathcal{E}_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}T}\right)\sin\theta_1 \sin\theta_2 \,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\varphi$$

où Z est une constante de normalisation (permettant d'avoir une probabilité totale égale à 1).
d) Donner le nom et la signification du facteur exponentiel.
e) En supposant que r est fixe et en faisant une approximation liée aux ordres de grandeur trouvés en c, écrire l'intégrale donnant l'énergie potentielle moyenne d'interaction $\langle \mathcal{E}_\mathrm{p} \rangle$ d'une paire de molécules. En déduire qu'elle est de la forme :

$$\langle \mathcal{E}_\mathrm{p} \rangle = \frac{a(T)}{r^6}$$

où $a(T)$ est une fonction de T dont on précisera le signe et la forme (mais bien sûr sans calculer complètement l'intégrale angulaire qui apparaît).

Données : permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$;
constante de Boltzmann $k_\mathrm{B} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$.

☞ *Réponses partielles*

2. a) $V = \dfrac{q\,d^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1 - 3\cos^2\theta}{4r^3}$. **3.** $\overrightarrow{F_{Q\to\vec{p}}} = -\dfrac{Q\,p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{e_r}$.

4. a) $\mathcal{E}_\mathrm{p} = -\dfrac{3\left(\overrightarrow{p_1}\cdot\vec{r}\right)\left(\overrightarrow{p_2}\cdot\vec{r}\right) - r^2\,\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$ (expression symétrique en $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$).

b) $\mathcal{E}_\mathrm{p} = \dfrac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi - 2\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$. e) Utiliser $\exp\left(-\dfrac{\mathcal{E}_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}T}\right) \approx 1 - \dfrac{\mathcal{E}_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}T}$.