

Corrigé du devoir test de physique n° 5

□ Problème 1 (E3A PC 2019)

A1. Initialement, un condensateur est déchargé. Lorsqu'il se charge, le courant arrivant sur une armature est identique à celui qui quitte l'autre : l'une des armatures se charge donc positivement et l'autre négativement, et il reste toujours globalement neutre.

A2. Il faut que la taille des armatures soit grande devant leur écartement, soit $R_{\text{ext}} \gg e$.

A3. Pour tout point M , le plan (Myz) est un plan de symétrie pour la distribution de charges, donc pour le champ électrostatique, ainsi $\vec{E}_A(M)$ est parallèle à ce plan donc n'a pas de composante sur \vec{u}_x . De même, (Mxz) est aussi un plan de symétrie, donc $\vec{E}_A(M)$ n'a pas de composante sur \vec{u}_y . On cherche donc a priori le champ sous la forme $\vec{E}_A(M) = E_A(x, y, z) \vec{u}_z$. Par ailleurs, la distribution supposée infinie est invariante par translation selon l'axe (Ox), donc la composante E_A est indépendante de la variable x . Et la distribution est invariante par translation selon l'axe (Oy), donc la composante E_A est indépendante de y . On a donc obtenu finalement : $\boxed{\vec{E}_A(M) = E_A(z) \vec{u}_z}$.

A4. Le plan A ($z' = 0$) est un plan de symétrie, donc $\vec{E}_A(-z')$ est symétrique de $\vec{E}_A(z')$ soit $\boxed{E_A(-z') = -E_A(z')}$ (fonction impaire).

A5. On applique le théorème de Gauss à un cylindre fermé Σ de génératrices parallèles à (Oz), de bases d'aire S situées aux abscisses $z' > 0$ et $-z'$: $\iint_{\Sigma} \vec{E}_A \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$. Flux : $\iint_{\Sigma} \vec{E}_A \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{base en } z'} E_A(z') \vec{u}_z \cdot d\vec{s} \vec{u}_z + \iint_{\text{base en } -z'} E_A(-z') \vec{u}_z \cdot d\vec{s} (-\vec{u}_z) + \iint_{\text{surf. lat.}} E_A \vec{u}_z \cdot d\vec{s} \vec{n} \perp \vec{u}_z$ $= \iint_{\text{base en } z'} E_A(z') dS + \iint_{\text{base en } -z'} (-E_A(-z')) dS + 0 = (E_A(z') - E_A(-z')) S = 2E_A(z') S$. Charge intérieure : $Q_{\text{int}} = \sigma S = \frac{Q_A}{\pi R_{\text{ext}}^2} S$.

Donc $2E_A(z') S = \frac{Q_A}{\epsilon_0 \pi R_{\text{ext}}^2} S$ d'où finalement : $\boxed{\vec{E}_A(M) = +\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon_0 \pi R_{\text{ext}}^2} \text{ pour } z' > 0 \text{ soit } z > \frac{e}{2}}$ et $\boxed{\vec{E}_A(M) = -\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon_0 \pi R_{\text{ext}}^2} \text{ pour } z < \frac{e}{2}}$.

A6. On utilise le théorème de superposition, après avoir remplacé ϵ_0 par ϵ : $\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$ avec $\vec{E}_B(M) = +\frac{Q_B \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} = -\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$ pour $z > -\frac{e}{2}$ et $\vec{E}_B(M) = -\frac{Q_B \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} = +\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$ pour $z < -\frac{e}{2}$. On obtient donc :

$\boxed{\vec{E}(M) = \vec{0} \text{ pour } z < -\frac{e}{2} \text{ et pour } z > +\frac{e}{2}} ; \boxed{\vec{E}(M) = -\frac{Q_A \vec{e}_z}{\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} \text{ pour } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}}.$

A7. Le potentiel est défini par : $d\mathcal{V} = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM}$. Pour $-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$: $d\mathcal{V} = \frac{Q_A \vec{e}_z}{\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z) = \frac{Q_A}{\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} dz$ d'où

$\mathcal{V}(z) = \frac{Q_A}{\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} z + \text{cte}$. Avec $\mathcal{V}(0) = 0$ la constante est nulle : $\boxed{\mathcal{V}(z) = \frac{Q_A}{\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} z \text{ pour } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}}$.

A8. La capacité est définie par : $C = \frac{Q_A}{U}$ avec $U = \mathcal{V}\left(+\frac{e}{2}\right) - \mathcal{V}\left(-\frac{e}{2}\right) = +\frac{Q_A e}{\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$ donc $\boxed{C = \epsilon \frac{\pi R_{\text{ext}}^2}{e}}$.

A9. Bilan d'énergie pour le condensateur : $\frac{d\mathcal{E}_C}{dt} = \mathcal{P}_{\text{reçue}} = UI = UC \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} CU^2 \right)$ donc $\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} CU^2}$ (à une constante près).

Ou bien : le stock d'énergie (réparti uniformément) est $\mathcal{E}_C = u_{\text{élec}} V = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \pi R_{\text{ext}}^2 e = \frac{1}{2} \epsilon \frac{U^2}{e^2} \pi R_{\text{ext}}^2 e$ soit $\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} CU^2}$.

A10. $u_{\text{élec,max}} = \frac{\mathcal{E}_{C,\text{max}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{CU_{\text{max}}^2}{\pi R_{\text{ext}}^2 e} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon U_{\text{max}}^2}{e^2}$ soit $\boxed{u_{\text{élec,max}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{max}}^2}$. AN $\boxed{u_{\text{élec,max}} = 43 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-3}}$.

A11. $\boxed{e = \frac{U_{\text{max}}}{E_{\text{max}}}}$. AN $\boxed{e = 5,0 \text{ } \mu\text{m}}$.

A12. $\boxed{R_{\text{ext}} = \sqrt{\frac{eC}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}}}$. AN $\boxed{e = 30 \text{ cm}}$. Ce serait un condensateur très encombrant ! Mais

on peut obtenir une surface équivalente avec un faible encombrement en enroulant les armatures et le diélectrique.

B1. Loi des mailles : $u_C(t) + R i(t) - E = 0$ avec $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$ (en convention récepteur), d'où $\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C(t) = \frac{E}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau = RC}$.

B2. τ est appelé temps de relaxation, ou encore constante de temps du circuit RC . Il donne l'ordre de grandeur du temps de charge ou de décharge du condensateur (régime transitoire).

B3. Solution générale : $u_C(t) = E + A \exp(-t/\tau)$. Avec la condition initiale $u_C(0) = 0 = E + A$ on obtient $u_C(t) = E [1 - \exp(-t/\tau)]$.

Cette fonction tend asymptotiquement vers E : par identification avec le graphe on peut lire $\boxed{E = 5,1 \text{ V}}$ (incertitude inférieure à 0,1 V). Pour trouver τ on peut tracer la tangente à l'origine et chercher son intersection avec l'asymptote ; ou bien chercher l'instant où $u_C(\tau) = E [1 - 1/e] = 0,63E = 3,2 \text{ V}$: on trouve dans les deux cas $\boxed{\tau = 1,1 \pm 0,1 \text{ ms}}$.

B4. $\boxed{C = \frac{\tau}{R} = 1,1 \pm 0,1 \mu\text{F}}$. (L'incertitude relative sur la lecture de τ est beaucoup plus grande que celle sur la valeur de R .)

C1. L'électrolyte étant globalement neutre, les charges accumulées des deux côtés sont opposées : $\rho_1 d_1 S = -\rho_2 d_2 S$ d'où $\boxed{\rho_1 d_1 = -\rho_2 d_2}$.

C2. Équation de Maxwell–Gauss pour ce milieu diélectrique : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$. De plus $\vec{E} = -\operatorname{grad} \mathcal{V}$, d'où $\Delta \mathcal{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ (équation de Poisson).

Sachant que \mathcal{V} et ρ sont fonctions de z seulement, ceci s'écrit : $\frac{d^2 \mathcal{V}}{dz^2} + \frac{\rho(z)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 0$.

C3. Pour $-\frac{e}{2} + d < z < \frac{e}{2} - d$: $\rho(z) = 0$ donc $\frac{d^2 \mathcal{V}}{dz^2} = 0$, d'où $\mathcal{V}(z) = Az + B$. Si on choisit $\mathcal{V}(0) = 0$, on obtient bien une forme linéaire $\mathcal{V}(z) = Az$. Pour $\frac{e}{2} - d < z < \frac{e}{2}$: $\frac{d^2 \mathcal{V}}{dz^2} = -\frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \text{cte}$ d'où $\mathcal{V}(z) = -\frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{z^2}{2} + Cz + D$, qui est bien une fonction parabolique

avec la concavité vers le haut (premier coefficient positif). De même pour $-\frac{e}{2} < z < -\frac{e}{2} + d$: $\mathcal{V}(z) = -\frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{z^2}{2} + Ez + F$, fonction parabolique avec la concavité vers le bas (premier coefficient négatif).

□ **Problème 2** (Banque PT 2021)

Q45. En notant \underline{Z} l'impédance de l'association RLC parallèle, et $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$ son admittance, on applique la relation du pont diviseur de tension en supposant la sortie ouverte (rien de branché entre les bornes de sortie) : $\underline{H}_F = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_0 \underline{Y}}$ soit

$$\underline{H}_F = \frac{1}{1 + R_0 \left(jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + jR_0 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} = \frac{\frac{R}{R + R_0}}{1 + j \frac{RR_0}{R + R_0} \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}. \text{ On peut identifier à } \underline{H}_F = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

en posant $H_0 = \frac{R}{R + R_0}$, $Q_F = \frac{RR_0 C}{R + R_0}$ et $Q_F \omega_0 = \frac{RR_0}{(R + R_0)L}$, d'où $Q_F = \frac{RR_0}{R + R_0} \sqrt{\frac{C}{L}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, soit $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Q46. On reconnaît la fonction de transfert d'un passe-bande d'ordre 2 : alors $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q_F}$.

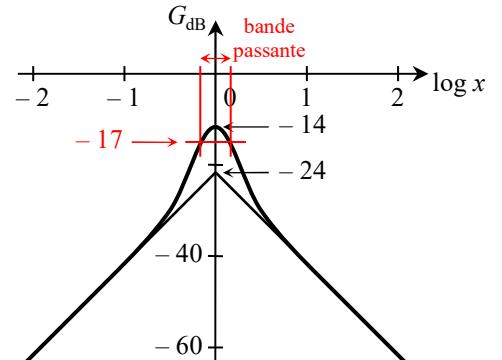
Q47. $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log |H_0| - 10 \log \left[1 + Q_F^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$.

Pour $x \ll 1$: $G_{\text{dB}} \approx 20 \log H_0 - 20 \log Q_F + 20 \log x = -24 + 20 \log x$ (pente + 20 dB/décade, ordonnée à l'origine -24 dB).

Pour $x \gg 1$: $G_{\text{dB}} \approx 20 \log H_0 - 20 \log Q_F - 20 \log x = -24 - 20 \log x$ (pente - 20 dB/décade, ordonnée à l'origine -24 dB).

Pour $x = 1$: $G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 = -14 \text{ dB}$.

La bande passante à -3 dB est l'intervalle de fréquences pour lequel $G_{\text{dB}} > G_{\text{dB, max}} - 3 \text{ dB} = -17 \text{ dB}$. Elle est ici assez étroite.



Q48. Pour ces ALI idéaux, les courants dans les deux entrées sont nuls : d'après la loi des noeuds, l'intensité est donc la même dans R_1 et dans R_2 : c'est i_e dans le montage 1, et on la note i (vers la gauche) dans le montage 2. De plus, les deux montages présentent une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse (-), donc les ALI fonctionnent en régime linéaire, soit $v_- = v_+$.

Montage 1 : $v_- = v_+ = 0$ (masse) donc on retrouve v_e aux bornes de R_1 (vers la gauche) et v_s aux bornes de R_2 (vers la droite).

Alors $v_e = +R_1 i_e$ (convention récepteur) et $v_s = -R_2 i_e$ (convention générateur), d'où $A_1 = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1}$ (réelle).

Montage 1 : $v_- = v_+ = v_e$ donc on retrouve v_e aux bornes de R_1 (vers la droite) et $v_s - v_e$ aux bornes de R_2 (vers la droite). Alors $v_e = R_1 i$ (convention récepteur) et $v_s - v_e = R_2 i$ (idem), d'où $v_s = (R_1 + R_2) i$ et finalement $A_2 = \frac{v_s}{v_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ (réelle aussi).

Q49. Par définition, $Z_{e1} = \frac{v_e}{i_e}$. Montage 1 : $Z_{e1} = R_1$. Montage 2 : $i_e = 0$ (entrée de l' ALI) donc $Z_{e2} = \infty$.

Le montage 2 est dit idéal : si on le branche derrière un autre quadripôle, il n'y a aucun courant entre les deux donc le premier quadripôle peut toujours être considéré en sortie ouverte, comme on l'a fait dans l'étude du filtre.

Q50. Si on met l'amplificateur (montage 2) derrière le filtre, $v_2 = v_e$ donc la fonction de transfert globale est :

$$\underline{H}_{FA} = \frac{v_s}{v_1} = \frac{v_s}{v_e} \times \frac{v_e}{v_1} = A_2 \times \underline{H}_F = \frac{A_2 H_0}{1 + jQ_F \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{H_1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \text{ avec } Q = Q_F = \frac{RR_0}{R + R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ et } H_1 = A_2 H_0 = \frac{(R_1 + R_2)R}{R_1(R + R_0)}.$$

Q51. Quand l'interrupteur est fermé, $v_3 = v_1$, avec $v_3 = A_2 v_2$. Pour la relation entre v_1 et v_2 donnée par le filtre, il faut retrouver une équation différentielle à partir de la fonction de transfert : $\frac{v_2}{v_1} = \frac{H_0}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} = \frac{H_0 j\omega/Q\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2}$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}\right) \underline{v}_2(t) = H_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0} \underline{v}_1(t) \Leftrightarrow \underline{v}_2(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{d\underline{v}_2}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2\underline{v}_2}{dt^2} = H_0 \frac{1}{Q\omega_0} \frac{d\underline{v}_1}{dt}. \text{ Finalement on multiplie tout par}$$

$$\omega_0^2 A_2, \text{ et on remplace } A_2 \underline{v}_2 \text{ par } \underline{v}_3, A_2 \underline{v}_1 \text{ par } A_2 \underline{v}_3, A_2 H_0 \text{ par } H_1, \text{ d'où l'équation : } \frac{d^2\underline{v}_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - H_1) \frac{d\underline{v}_3}{dt} + \omega_0^2 \underline{v}_3(t) = 0.$$

Q52. Pour que l'on obtienne des oscillations pseudo-périodiques, il faut que le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} (1 - H_1) r + \omega_0^2 = 0$ soit négatif, soit $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - H_1)^2 - 4\omega_0^2 < 0$. Les racines sont alors $r = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 - H_1) \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{1}{\tau} \pm i\omega$ et la solution générale de l'équation différentielle est $\underline{v}_3(t) = A \exp(t/\tau) \cos(\omega t + \phi)$. Pour que ces oscillations soient d'amplitude croissante, il faut que τ soit positif, donc $H_1 > 1$. Alors la condition $\Delta < 0$ devient $H_1 - 1 < 2Q$. Il faut donc avoir $1 < H_1 < 1 + 2Q$.

$$\boxed{\text{Q53, 54. La fréquence d'oscillation est } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{4\pi} \text{ soit } f = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{(H_1 - 1)^2}{4Q^2}}. f \approx f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{ pour } H_1 \approx 1 \text{ ou pour } Q \gg 1.}$$

Q55. Si H_1 est grand (proche de $1 + 2Q$), le temps caractéristique τ est petit donc la croissance des oscillations aboutit rapidement à la saturation de l'ALI ; et la fréquence diffère nettement de f_0 . On est alors loin d'obtenir des oscillations quasi sinusoïdales à f_0 .

$$\boxed{\text{Q58. La résistance d'un conducteur de section } S \text{ et de longueur } L \text{ s'écrit } R = \frac{L}{\sigma S}. \text{ Ici le fil a pour section } S = \pi \left(\frac{d_{\text{Cu}}}{2} \right)^2, \text{ et la longueur totale du fil est celle de } N_{\text{sp}} \text{ spires de rayon } r = \sqrt{\frac{S_{\text{B}}}{\pi}}, \text{ soit } L = N_{\text{sp}} 2\pi \sqrt{\frac{S_{\text{B}}}{\pi}}. \text{ Donc } R = \frac{8N_{\text{sp}}}{\sigma_{\text{Cu}} d_{\text{Cu}}^2} \sqrt{\frac{S_{\text{B}}}{\pi}}.}$$

Q59. Deux spires adjacentes sont deux conducteurs à des potentiels légèrement différents (car le potentiel diminue le long d'une résistance), séparés par un isolant : c'est bien la structure d'un condensateur.

$$\boxed{\text{Q60. Les spires sont en série les unes avec les autres, donc le condensateur } \{\text{Sp1-Sp2}\} \text{ est en série avec } \{\text{Sp2-Sp3}\}, \text{ et ainsi de suite. Dans ce cas les inverses des capacités s'ajoutent : ainsi } \frac{1}{C_{\text{éq}}} = \sum_{n=1}^{N_{\text{sp}}-1} \frac{1}{C_{\text{Sp}n-\text{Sp}(n+1)}} = (N_{\text{sp}} - 1) \frac{1}{C_i} \text{ soit } C_{\text{éq}} = \frac{C_i}{N_{\text{sp}} - 1}.}$$

Q61. Ce condensateur est placé entre les deux bornes de la bobine, comme l'inductance elle-même, le schéma équivalent de la bobine comporte donc $C_{\text{éq}}$ en parallèle avec L_{sp} . Quant à la résistance R , elle est généralement représentée en série avec L_{sp} , mais le modèle parallèle existe aussi.

Q62. Ce condensateur est donc en parallèle avec celui de capacité C : leurs capacités s'ajoutent, et il faut donc remplacer C par $C + C_{\text{éq}}$ dans les calculs.

$$\boxed{\text{Q63. Comme on l'a vu à la question Q51 : } \underline{V}_2 = \underline{H}_F \underline{V}_1, \underline{V}_3 = \underline{A} \underline{V}_2 \text{ et } \underline{V}_1 = \underline{V}_3. \text{ Donc } \underline{V}_2 = \underline{H}_F \underline{A} \underline{V}_2 \text{ soit } \underline{H}_F \underline{A} = 1.}$$

$$\boxed{\text{Q64. Comme } \underline{A} \text{ est un réel positif, } \underline{H}_F \text{ doit l'être aussi, donc } \arg[\underline{H}_F] = 0.}$$

$$\boxed{\text{Q65. La condition devient } \underline{H}_F \underline{A}' = 1, \text{ soit } \underline{H}_F = \frac{1}{A_0} e^{-j\delta\psi}, \text{ donc } \arg[\underline{H}_F] = -\delta\psi.}$$

$$\boxed{\text{Q66. } \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\delta\omega}{\omega_0} \text{ et } \frac{\omega_0}{\omega} \approx 1 - \frac{\delta\omega}{\omega_0} \text{ donc } \underline{H}_F \approx \frac{H_0}{1 + j2Q\delta\omega/\omega_0}. \text{ Alors } \arg[\underline{H}_F] = \arg[H_0] - \arg\left[1 + j2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right] = 0 - \arctan\left[2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right].}$$

$$\text{Donc } -\arctan\left[2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right] = -\delta\psi, \text{ d'où } \delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \tan(\delta\psi) \text{ et } \delta f = \frac{f_0}{2Q} \tan(\delta\psi). \text{ AN } \delta f = 3 \cdot 10^2 \text{ Hz (variation de 0,3 %).}$$

Q67. Si $\delta\psi$ fluctue légèrement, la fréquence de l'oscillateur fluctue aussi ; si le temps de réponse du détecteur est assez grand, on observera alors un élargissement spectral du signal (pic de largeur $2\delta f_{\text{max}}$).

Q68. Pour réduire fortement cette fluctuation, il faut augmenter au maximum le facteur de qualité Q (d'où son nom).