

## Devoir d'entraînement de physique n° 6

Cet énoncé comporte deux problèmes.

### Problème A

#### De la physique autour d'un tore

## II. — Étude d'un conducteur ohmique torique

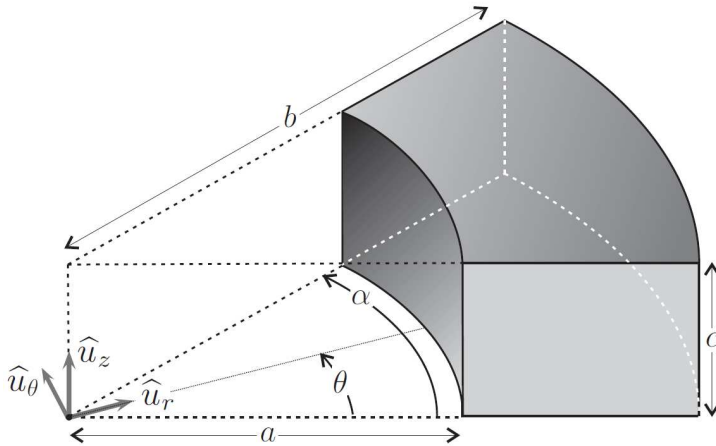


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique  $\gamma$  de l'ordre de  $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ . Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ , d'épaisseur  $c$ .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale  $R$  d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles  $\theta = 0$  où on applique un potentiel uniforme  $V = U$  et  $\theta = \alpha$  où on applique un potentiel  $V = 0$ .

❑ 6 — On rappelle la valeur numérique

de la constante  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$  dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

❑ 7 — Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge  $\rho$ . En déduire que  $\rho \simeq 0$  tant que la durée  $T$  caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée  $\tau$  dont on donnera l'expression en fonction de  $\gamma$  et  $\varepsilon_0$  ainsi que la valeur numérique.

❑ 8 — Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si  $T \gg \tau$ .

❑ 9 — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique  $V$ .

❑ 10 — On suppose que  $V$  ne dépend que de l'angle  $\theta$  en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel  $\vec{\text{grad}}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$  et de son laplacien  $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$ . Déterminer les expressions de  $V(\theta)$ , du champ  $\vec{E}$  et de la densité de courant  $\vec{j}$ .

❑ 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale  $I$  traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale  $R$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$ .

❑ 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section  $S$  et de longueur  $L$ . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand  $b$  est très proche de  $a$ .

### III. — Étude d'une pince ampèremétrique

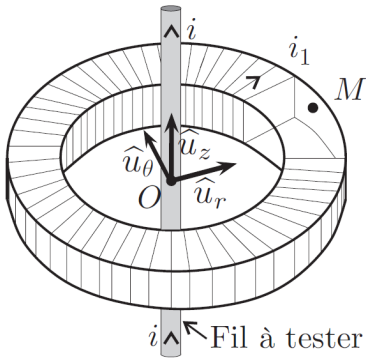


FIGURE 4 — Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant  $N$  spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ , d'épaisseur  $c$ , d'axe  $(O, z)$ . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique  $\lambda$ .

Un point  $M$  intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques :  $\overrightarrow{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$  avec  $r \in [a, b]$  et  $z \in [0, c]$ .

Un fil rectiligne infini de même axe  $(O, z)$  est parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$ . On note  $i_1(t)$  l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

□ 13 — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

□ 14 — Montrer qu'au point  $M$  intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme  $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$  où l'on précisera l'expression de  $B(r)$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $i(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $N$  et  $r$ .

□ 15 — Calculer le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance  $L$  du bobinage et de mutuelle inductance  $M$  entre le fil et le bobinage.

□ 16 — Déterminer l'expression de la résistance totale  $R_p$  du bobinage en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $N$  et  $\lambda$ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec  $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$  associée à l'intensité complexe  $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$  et  $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$  associée à l'intensité complexe  $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$ .

□ 17 — Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$  en fonction de  $M$ ,  $\omega$ ,  $R_p$  et  $L$ .

□ 18 — Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

## Problème B

### Activité électrique du cœur

**II.A.1)** Dans un premier temps, on se propose d'étudier le champ électrique dû à la présence de charges ponctuelles avant de passer à la modélisation électrique du cœur.

**Q 32.** Soit une charge ponctuelle  $q > 0$  placée en un point  $O$  fixe. Donner l'expression du vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  et du potentiel électrostatique  $V$  créé par  $q$  en un point  $M$  quelconque de l'espace situé à une distance  $r$  de  $O$ . On suppose que le potentiel électrostatique est nul à l'infini.

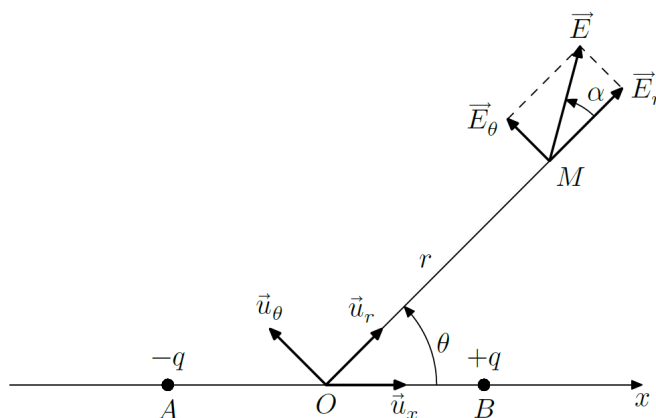
**Q 33.** Rappeler la définition d'une ligne de champ et d'une surface équipotentielle. Quelles sont-elles sur l'exemple précédent de la charge ponctuelle  $q > 0$  située en  $O$  ? en faire une représentation dans un plan passant par  $O$ .

**Q 34.** On considère deux charges fixes positionnées sur un axe  $(Ox)$  : une charge  $-q < 0$  au point  $A$  d'abscisse  $x = -a$  et une charge  $q > 0$  au point  $B$  d'abscisse  $x = a$ . Déterminer le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique  $V$  au point  $O$ , milieu de  $[AB]$ .

Un dipôle électrique est constitué de deux charges  $-q$  située en  $A$  et  $+q$  située en  $B$  ; on lui associe un moment dipolaire électrique  $\vec{p} = q\vec{AB}$ , de norme  $p = qd$  avec  $d = AB$ . On repère un point  $M$  quelconque de l'espace par  $\vec{r} = \vec{OM}$  avec  $O$  le milieu de  $[AB]$  (figure 4). En coordonnées sphériques et à grande distance des deux charges, c'est-à-dire pour  $r = OM \gg d$ , on montre que le potentiel électrostatique  $V$  au point  $M$  s'écrit

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Ce potentiel électrostatique est associé à un champ électrostatique  $\vec{E}$ .



**Figure 4** Dipôle électrique et coordonnées associées

**Q 35.** Déterminer les expressions des composantes  $E_r$  et  $E_\theta$  du champ électrostatique  $\vec{E}$  à grande distance des deux charges ( $r \gg d$ ).

**Q 36.** Quelle relation a-t-on entre l'angle  $\theta$  et l'angle  $\alpha$  que fait le champ  $\vec{E}$  avec l'axe  $(OM)$  ?

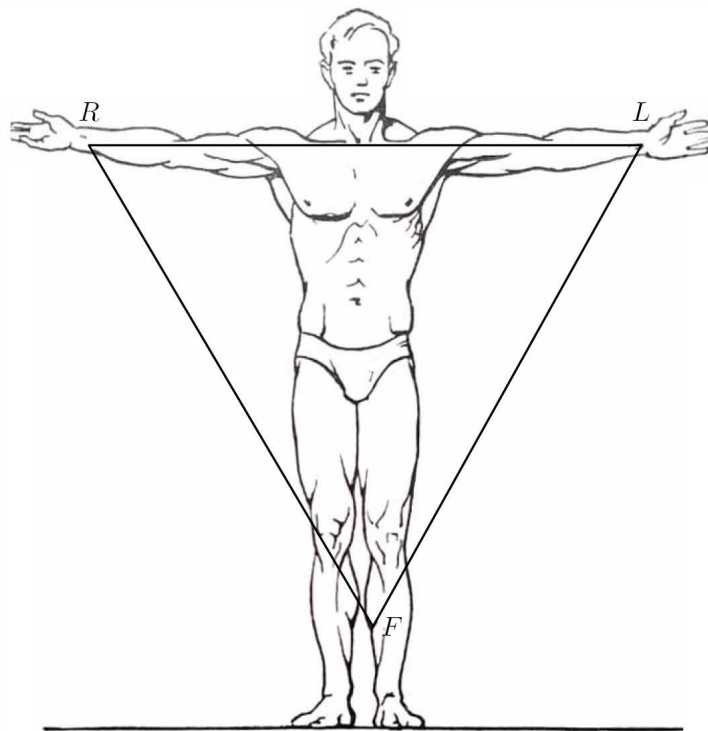
**Q 37.** Déterminer et dessiner le champ  $\vec{E}$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$ .

**II.A.2)** L'enregistrement de l'activité cardiaque électrique au cours du temps est réalisée en mesurant une différence de potentiel entre deux points du corps. On appelle dérivation un système de deux électrodes exploratrices entre lesquelles on mesure une différence de potentiel. Dans l'étude des dérivations dites périphériques (ou des membres) les électrodes sont placées soit au poignet droit (point  $R$ ) de potentiel  $V_R$ , soit au poignet gauche (point  $L$ ) de potentiel  $V_L$ , soit à la jambe gauche (point  $F$ ) de potentiel  $V_F$ . Par hypothèse, les points  $R$ ,  $L$  et  $F$  sont aux sommets d'un triangle équilatéral (figure 5). On définit enfin une électrode de référence au potentiel  $V_W$  constant dont on précise les caractéristiques ci-après.

Une dérivation unipolaire correspond à une différence de potentiel entre une électrode exploratrice et l'électrode de référence alors qu'une dérivation bipolaire correspond à une différence de potentiel entre deux électrodes exploratrices.

**Q 38.** Combien peut-on construire de dérivation unipolaire ? de dérivation bipolaire ?

**Q 39.** Quel intérêt y a-t-il à associer ces deux types de dérivations ?



**Figure 5** Dérivations périphériques

La théorie d'Einthoven permet d'expliquer les tracés observés dans les dérivations périphériques (enregistrement à grande distance du coeur).

- *Hypothèse 1* : à chaque moment du cycle cardiaque le coeur est assimilable à un dipôle électrique dont le vecteur moment dipolaire  $\vec{p}$  varie en module, direction et sens au cours du cycle cardiaque.
- *Hypothèse 2* : l'origine de  $\vec{p}$  peut être considérée comme fixe et correspond au centre électrique  $O$  du coeur.
- *Hypothèse 3* : le centre de gravité du triangle équilatéral formé par  $R$ ,  $L$  et  $F$  est occupé par le centre électrique  $O$  du coeur.

**Q 40.** À l'aide de l'expression du potentiel créé par un dipôle donnée précédemment, exprimer les trois potentiels  $V_R$ ,  $V_L$  et  $V_F$  en fonction, notamment, des distances  $r_R = OR$ ,  $r_L = OL$  et  $r_F = OF$ . On n'introduira pas de variables angulaires.

**Q 41.** Qu'imposent les hypothèses 2 et 3 pour le calcul précédent ?

**Q 42.** En déduire la possibilité de définir par le calcul une électrode de référence de potentiel  $V_W$  nul. On parle alors de borne centrale de Wilson. En pratique comment réaliser cette borne de Wilson ?