Ém4 – Corrigé de l'exercice 4

¤ Exercice 4

a) $\boxed{\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{m_2}\cdot\vec{B}(M) = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3\left(\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{e_r}\right)\left(\overrightarrow{m_2}\cdot\overrightarrow{e_r}\right)-\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2}}{r^3}}$. La force subie par $\overrightarrow{m_2}$ est $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_p}$, gradient calculé au point M.

b) – Cas 1 : $\mathcal{E}_p = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3m_1m_2 - m_1m_2}{r^3} = -\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{m_1m_2}{r^3}$ donc $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{3\mu_0}{2\pi}\dfrac{m_1m_2}{r^4}\overrightarrow{e_r}}$ (force attractive : le pôle nord attire le pôle sud).

– Cas 2 : $\mathcal{E}_p = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3m_1(-m_2) - m_1(-m_2)}{r^3} = +\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{m_1m_2}{r^3}$ donc $\boxed{\vec{F} = +\dfrac{3\mu_0}{2\pi}\dfrac{m_1m_2}{r^4}\overrightarrow{e_r}}$ (force répulsive : les pôles nord se repoussent).

– Cas 3 : $\mathcal{E}_p = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3\times 0 - m_1m_2}{r^3} = +\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m_1m_2}{r^3}$ donc $\boxed{\vec{F} = +\dfrac{3\mu_0}{4\pi}\dfrac{m_1m_2}{r^4}\overrightarrow{e_r}}$ (force répulsive : les pôles se repoussent deux à deux).

c) $m_1 \sim m_2 \sim \mu_B$ et $r \sim 10^{-10}$ m, d'où $\boxed{\mathcal{E}_p \sim \dfrac{\mu_0\mu_B^2}{r^3} \sim 10^{-22}\ \text{J}}$. Énergie moyenne d'agitation thermique : $\boxed{\mathcal{E}_c \sim k_B T \sim 10^{-21}\ \text{J}}$.

L'énergie cinétique d'agitation thermique, qui tend à orienter les dipôles aléatoirement, est généralement plus grande que l'énergie potentielle d'interaction, qui tend à les aligner : le désordre l'emporte, et la matière ne reste pas aimantée en général, en l'absence de champ extérieur.

Ém5 – Corrigé des exercices 1 et 3

¤ Exercice 1

a) La distribution de charges et de courants est à symétrie sphérique : un point M de l'espace appartient à une infinité de plans de symétrie de cette distribution, qui sont tous les plans contenant (OM). Par conséquent, le champ électrique est parallèle à tous ces plans, soit $\vec{E}(M,t) = E_r(M,t)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques ; et le champ magnétique est orthogonal à tous ces plans, soit $\boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{0}}$. Et comme il y a invariance par rotation autour de tout axe passant par O, E_r est indépendant de θ et de φ : $\boxed{\vec{E}(M,t) = E_r(r,t)\overrightarrow{e_r}}$.

b) Le théorème de Gauss est toujours valable en régime variable, donc on obtient comme en électrostatique : $\boxed{\vec{E}(M,t) = \dfrac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}}$ pour $r > R$, c'est-à-dire dans l'air extérieur. Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ donc ici $\boxed{\vec{\Pi} = \vec{0}}$.

c) Pour trouver une équation différentielle pour $Q(t)$ il suffit d'en trouver une pour le champ $\vec{E}(M,t)$. Pour cela, la seule équation de Maxwell utile est celle de Maxwell–Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{0}$. On combine avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$: $\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \gamma\vec{E} = \vec{0}$ d'où $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}Q(t) = 0}$. Solution, avec la condition initiale $Q(0) = Q_0$: $\boxed{Q(t) = Q_0\exp\left(-\dfrac{\gamma t}{\varepsilon_0}\right)}$.

La durée de décharge est de l'ordre de quelques τ (par exemple 5τ) avec $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}$. Pour l'évaluer il faut estimer un ordre de grandeur de la conductivité de l'air. Sachant que l'ordre de grandeur de γ peut aller de $10^7\ \text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ pour les meilleurs conducteurs à $10^{-20}\ \text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ pour les meilleurs isolants, on peut supposer par exemple que pour un air humide légèrement conducteur $\gamma \sim 10^{-14}\ \text{S}\cdot\text{m}^{-1}$, ce qui donne une durée de décharge $5\tau \sim 10^3$ s, soit <u>quelques heures</u>.

d) La puissance volumique fournie par les champs aux charges de l'air est $\vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2$, donc pour obtenir la puissance totale il faut intégrer sur tout le volume extérieur à la boule : $\mathcal{P} = \iiint_{\text{air ext}} \gamma E^2\,\mathrm{d}\tau = \int_{r=R}^{+\infty}\gamma\dfrac{Q(t)^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \gamma\dfrac{Q(t)^2}{4\varepsilon_0^2}\int_{r=R}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2}$ soit $\boxed{\mathcal{P} = \dfrac{\gamma Q(t)^2}{4\varepsilon_0^2 R} = \dfrac{\gamma Q_0^2}{4\varepsilon_0^2 R}\exp\left(-\dfrac{2\gamma t}{\varepsilon_0}\right)}$. Alors $W_{\text{ém}} = \int_{t=0}^{+\infty}\mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\gamma Q_0^2}{4\varepsilon_0^2 R}\int_{t=0}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{2\gamma t}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}t$ soit $\boxed{W_{\text{ém}} = \dfrac{Q_0^2}{8\varepsilon_0 R}}$.

e) Si on fait un bilan énergétique sur l'ensemble de l'air environnant, comme il n'y a pas de flux externe (vecteur de Poynting nul), cette énergie cédée par le champ (et dissipée par effet Joule) est égale à la variation de l'énergie électromagnétique stockée : $\mathcal{E}_{\text{ém}}(+\infty) - \mathcal{E}_{\text{ém}}(0) = -W_{\text{ém}}$. On vérifie ce bilan en calculant l'énergie stockée : $\mathcal{E}_{\text{ém}}(t) = \iiint_{\text{air ext}}\left(\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathrm{d}\tau$ soit

$$\mathcal{E}_{\text{ém}}(t) = \int_{r=R}^{+\infty}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q(t)^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} + 0\right)4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{2\gamma t}{\varepsilon_0}\right)\int_{r=R}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\exp\left(-\frac{2\gamma t}{\varepsilon_0}\right)$$

d'où $\boxed{\mathcal{E}_{\text{ém}}(+\infty) - \mathcal{E}_{\text{ém}}(0) = -\dfrac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$.

¤ **Exercice 3**

a) Les relations contenant la densité de charge sont l'équation de Maxwell–Gauss $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ et l'équation locale de conservation de la charge $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$. Pour les combiner on utilise la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \gamma\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0$. Solution : $\boxed{\rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$ avec le temps de relaxation $\boxed{\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma} = 9\cdot 10^{-19}\text{ s}}$. Le temps de disparition de l'excédent de charge est donc <u>de l'ordre de 10^{-18} s, c'est-à-dire inobservable, quel que soit l'instrument : le milieu reste toujours neutre</u>.

b) Densité volumique de courant de déplacement : $\vec{j_\mathrm{d}} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ donc $j_\mathrm{d} \sim \varepsilon_0\omega E = \varepsilon_0 2\pi f E$. Alors $\dfrac{j_\mathrm{d}}{j} \sim \dfrac{\varepsilon_0 2\pi f}{\gamma}$. Pour f < 1 THz on trouve $\dfrac{j_\mathrm{d}}{j} < 5\cdot 10^{-6}$ donc j_d est <u>négligeable devant *j*</u>.

c) Équations de Maxwell dans ce milieu : $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0\ ;\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ;\ \operatorname{div}\vec{B} = 0\ ;\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \dfrac{1}{c^2\tau}\vec{E}}$.

d) On utilise la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$, soit $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(0) - \Delta\vec{E} \Leftrightarrow -\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\Delta\vec{E}$ et finalement $\boxed{\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2\tau}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$. On reconnaît une équation de diffusion, avec un coefficient de diffusion $\boxed{D = c^2\tau}$.
