Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 6

¤ **Problème A** (Mines-Ponts PSI 2014)

Corrigé rédigé par Paul Roux (MP, lycée Claude Fauriel, Saint-Étienne)*

6. – ϵ_0 est la $\boxed{\text{permittivité diélectrique du vide}}$; elle se mesure usuellement en $\boxed{\text{farad par mètre}}$.

7. – À partir de l'équation de Maxwell-Gauss $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ et de la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, on peut recopier l'équation locale de conservation de la charge $\operatorname{div}\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ sous la forme $\boxed{\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{1}{\tau}\rho = 0}$ où la constante de temps τ vaut $\boxed{\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\gamma} \sim 10^{-19}\ \mathrm{s}}$. On en conclut la solution $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ donc ρ s'annule au bout d'une durée T telle que $\boxed{T \gg \tau}$.

8. – L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{j} + \epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$ peut être simplifiée par l'approximation des états quasi-stationnaires (AEQS) $\boxed{\left\|\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\| \ll \|\vec{j}\|}$ à condition que $\epsilon_0\dfrac{\|\vec{E}\|}{T} \ll \gamma\vec{E}\|$ où T est la durée caractéristique des variations temporelles du champ électrique, donc si $\boxed{T \gg \tau}$.

9. – On a maintenant pour système d'équations vérifiées en régime permanent dans un conducteur ohmique ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$, $\rho = 0$) $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$. D'après la seconde équation, il existe un potentiel scalaire V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$; d'après la première, ce potentiel vérifie $\operatorname{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = 0$ ou $\boxed{\Delta V = 0}$.

10. – On a maintenant $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = 0$ et $V(0) = U$, $V(\alpha) = 0$ donc V est une fonction affine, $\boxed{V = U\dfrac{\alpha - \theta}{\alpha}}$; on en déduit $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ donc $\boxed{\vec{E} = \dfrac{U}{\alpha r}\hat{u}_\theta}$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ donc $\boxed{\vec{j} = \dfrac{\gamma U}{\alpha r}\hat{u}_\theta}$.

11. – L'intensité demandée est le flux du vecteur $\vec{j}$, $I = \displaystyle\int \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\hat{u}_\theta$; il vient donc l'expression $I = \dfrac{\gamma U}{\alpha}\displaystyle\int_a^b \dfrac{\mathrm{d}r}{r}\int_0^c \mathrm{d}z$ ou $\boxed{I = \dfrac{\gamma c}{\alpha}\ln\dfrac{b}{a}U}$ qu'on écrit $I = \dfrac{U}{R}$ avec $\boxed{R = \dfrac{\alpha}{\gamma c}\dfrac{1}{\ln(b/a)}}$.

12. – La relation demandée est $\boxed{R = \dfrac{L}{\gamma S}}$. Ici, on peut remarquer que $\ln\dfrac{b}{a} = \ln\left(1 + \dfrac{b-a}{a}\right) \simeq \dfrac{b-a}{a}$ si a et b sont proches, donc $R \simeq \dfrac{\alpha a}{\gamma c(b-a)}$ où on reconnaît $S = c(b-a)$ et $L = a\alpha$ donc $\boxed{R \simeq \dfrac{L}{\gamma S}}$.

13. – L'approximation des états quasi-stationnaires (AEQS) a été présentée à la question **8** : elle consiste à négliger le courant de déplacement $\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\vec{j}$, donc à calculer le champ magnétique par les équations $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}}$ et $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, exactement comme dans le cas magnétostatique. Le théorème de Stokes $\displaystyle\oint_{(\mathcal{C})}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{(\mathcal{S})}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ pour un contour fermé $(\mathcal{C})$ servant de bord orienté à la surface $(\mathcal{S})$ permet alors d'énoncer le théorème d'Ampère, la circulation de $\vec{B}$ sur un tel contour fermé vérifie $\boxed{\displaystyle\oint_{(\mathcal{C})}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 i_{(\mathcal{S})}}$ où le courant enlacé $i_{(\mathcal{S})}$ est celui qui traverse la surface $(\mathcal{S})$.

14. – Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie matérielle des courants $i(t)$ et $i_1(t)$ donc le champ $\vec{B}$ créé par ces courants est perpendiculaire à ces plans de symétrie : $\vec{B}(M) = B(r,\theta,z)\hat{u}_\theta$. Ce champ est également invariant par tout rotation d'un angle multiple de $2\pi/N$; si N est assez grand, il s'agit pratiquement d'une invariance de révolution donc $\vec{B}(M) = B(r,z)\hat{u}_\theta$. On applique alors le théorème d'Ampère à un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon r et d'axe (Oz), donc à r et z fixés, et entièrement situé à l'intérieur du tore ; on a alors $\mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}\theta\hat{u}_\theta$ donc $\displaystyle\oint_{(\mathcal{C})}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 2\pi r B(r,z)$. Le courant traversant un disque de rayon r comporte (dans le sens positif) le courant i au centre en N courants tous égaux à i_1 (puisque le cercle $(\mathcal{C})$ est intérieur au tore, le disque est traversé une seule fois par chacun des fils formant un rectangle) soit $i_{(\mathcal{S})} = i + Ni_1$ et $\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\hat{u}_\theta \text{ où } B(r) = \dfrac{\mu_0}{2\pi r}(i + Ni_1)}$.

15. – Considérant que le bobinage de la pince ampèremétrique est formé de N rectangles de côtés $b-a$ et c, il vient $\Phi = N\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\hat{u}_\theta$ donc $\Phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi}(i+Ni_1)\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r}\int_0^c \mathrm{d}z$ ou enfin $\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 Nc}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}(i+Ni_1)}$. Puisque $\Phi = Li_1 + Mi$ pour i et i_1 quelconque, on peut identifier les deux termes $\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}}$ et $\boxed{M = \frac{\mu_0 Nc}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a} = \frac{L}{N}}$.

16. – Avec une résistance par unité de longueur λ et un bobinage formé de N rectangles de côtés $b-a$ et c donc de longueur $2(b+c-a)$, on a $\boxed{R_p = 2\lambda N(b+c-a)}$.

17. – En circuit fermé, le bobinage est un circuit (R_p, L, M) avec $u = 0 = R_p i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ qu'on écrit en notation complexe $(R_p + \jmath\omega L)\,\underline{i}_1 = -\jmath M\omega \underline{i}$ soit $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}} = -\frac{\jmath M\omega}{R_p + \jmath L\omega}}$.

18. – On réalise une mesure de i au moyen d'une mesure de i_1 si la relation entre les deux grandeurs est linéaire, indépendamment de la forme effectivement sinusoïdale ou non de ces deux courants ; il faut donc que $\boxed{\omega \gg \frac{R_p}{L}}$ pour toutes les pulsations ω figurant dans le spectre de Fourier du signal à mesurer. Dans ce cas, $i_1 = -\frac{M}{L}i$ donc $\boxed{i_1 = -\frac{i}{N}}$; le coefficient N permet de mesurer un corant i assez élevé avec un fort coefficient d'atténuation.

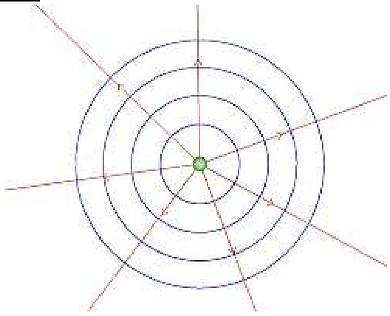
¤ **<u>Problème B</u>** (Centrale-Supélec TSI 2022)

Corrigé rédigé par Cécile Bône-Rambaud (MP, lycée Dessaignes, Blois) et Hélène Mouilleron (PC, lycée Saliège, Toulouse)

Q32. Champ et potentiel créés en M par q au point O : $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{r}}$ et $\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

Q33. Ligne de champ : ligne colinéaire à $\vec{E}$ en tout point. Un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ sur cette ligne vérifie : $\vec{E}\wedge\overrightarrow{dl} = \vec{0}$. Pour q au point O ce sont des <u>demi-droites radiales</u>.

Surface équipotentielle : surface à V constant. Pour q en O ce sont des <u>sphères de centre O</u>.



Q34. Champ électrostatique au point O par superposition :

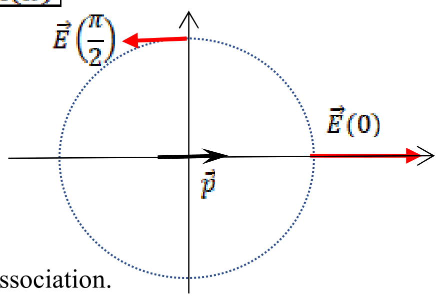
$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}_x + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\vec{u}_x)$ soit : $\boxed{\vec{E}(O) = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}_x}$

Potentiel en O : $V(O) = V_A(O) + V_B(O) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ soit : $\boxed{V(O) = 0}$

Q35. Champ créé à grande distance du dipôle : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ donne $\boxed{\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\,p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{cases}}$

Q36. Lien entre les angles : $\tan(\alpha) = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)} = \frac{1}{2}\tan(\theta)$ ou $\boxed{\tan(\theta) = 2\tan(\alpha)}$

Q37. Pour $\theta = 0$ $\begin{cases} E_r = E_x = \frac{2\,p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = E_y = 0\end{cases}$ et pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\begin{cases} E_r = E_y = 0 \\ E_\theta = -E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{cases}$



Q38. Par définition les dérivations unipolaires sont $V_R - V_W$, $V_L - V_W$ et $V_F - V_W$ et les dérivations bipolaires sont $V_R - V_L$, $V_L - V_F$ et $V_F - V_R$. On peut donc en construire <u>3 de chaque sorte</u>.

Q39. L'intérêt d'associer ces deux types de dérivations peut être de vérifier les mesures par association. En effet on doit avoir (par exemple) : $V_R - V_L = (V_R - V_W) - (V_L - V_W)$.

Q40. Potentiels en R, L et F : $\boxed{V_R = \frac{\vec{p}.\vec{r}_R}{4\pi\varepsilon_0 r_R^3}}$, $\boxed{V_L = \frac{\vec{p}.\vec{r}_L}{4\pi\varepsilon_0 r_L^3}}$ et $\boxed{V_F = \frac{\vec{p}.\vec{r}_F}{4\pi\varepsilon_0 r_F^3}}$

Q41. Hypothèse 2 : l'origine du dipôle est en O, donc les distances à considérer dans les potentiels doivent être comptées à partir du point O. Hypothèse 3 : O est le centre de gravité du triangle équilatéral RLF, donc les trois distances sont égales : $r_R = r_L = r_F$.

Q42. La borne centrale de Wilson doit avoir un potentiel nul, or $V_R + V_L + V_F = 0$ car $\vec{r}_R + \vec{r}_L + \vec{r}_F = \vec{0}$ (triangle équilatéral RLF). Il suffit alors de relier les points R L et F avec trois résistances identiques à un unique point W, qui est alors de potentiel nul (loi des nœuds en termes de potentiels) : $V_W = \frac{1}{3}(V_R + V_L + V_F) = 0$.