On1 – Corrigé des exercices 3, 4, 5

¤ Exercice 3

a) Voir cours. On trouve $\boxed{c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$.

b) Pour une onde stationnaire obéissant à l'équation de D'Alembert, la déformation est de la forme $\boxed{\xi(x,t)=A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\psi)}$. Or la force de traction/compression s'écrit $T_x(x,t)=ES\dfrac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$ (voir démo du cours), ce qui donne $\boxed{T_x(x,t)=-kESA\cos(\omega t+\varphi)\sin(kx+\psi)}$.

c) Les deux extrémités sont libres, et ne subissent donc pas de force de traction/compression : $\boxed{T_x(0,t)=T_x(L,t)=0,\forall t}$.
On en déduit d'une part $\sin(\psi)=0$, on peut donc prendre $\psi=0$; d'autre part, $\sin(kL)=0$, d'où la condition de quantification $k_n=\dfrac{n\pi}{L}$. La relation de dispersion étant (pour une onde stationnaire obéissant à l'équation de D'Alembert) $k=\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{2\pi f}{c}$, on en déduit les fréquences propres $\boxed{f_n=\dfrac{nc}{2L}}$.

d) La fréquence fondamentale permet de calculer $c=2Lf_1$. Or $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ donc $\boxed{E=\rho c^2=4\rho L^2 f_1^2}$. AN $\boxed{E=5{,}72\text{ GPa}}$.

¤ Exercice 4

a) Onde incidente : $\boxed{y_{\mathrm{i}}(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi)}$ soit $y_{\mathrm{i}}(x,t)=\mathrm{Re}\left[\underline{A}_{\mathrm{i}}(x)\exp(j\omega t)\right]$ avec $\boxed{\underline{A}_{\mathrm{i}}(x)=A\exp(-jkx+\varphi)}$.
Onde réfléchie : $\boxed{y_{\mathrm{r}}(x,t)=B\cos(\omega t+kx+\psi)}$ soit $y_{\mathrm{r}}(x,t)=\mathrm{Re}\left[\underline{A}_{\mathrm{r}}(x)\exp(j\omega t)\right]$ avec $\boxed{\underline{A}_{\mathrm{r}}(x)=B\exp(+jkx+\psi)}$.
En un point quelconque, l'onde résultante est $y(x,t)=y_{\mathrm{i}}(x,t)+y_{\mathrm{r}}(x,t)$, d'où $\underline{A}(x)=\underline{A}_{\mathrm{i}}(x)+\underline{A}_{\mathrm{r}}(x)$.

b) Si on néglige son poids, la masse m est soumise à la réaction de la tige verticale, qui est normale en l'absence de frottement (soit $\vec{R}=R_x\vec{e_x}+R_z\vec{e_z}$) et à la tension de l'extrémité de la corde, exercée par la gauche sur la droite, soit $-\vec{T}(0,t)$ avec la notation du cours.
PFD pour la masse m : $m\vec{a}=\vec{R}-\vec{T}(0,t)$. Projection sur $\vec{e_y}$ (vertical ascendant) : $m\dfrac{\mathrm{d}^2y(0,t)}{\mathrm{d}t^2}=0-T_y(0,t)$. Or on a montré dans le cours la relation : $T_y(x,t)=T\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$. L'équation différentielle peut donc s'écrire : $m\dfrac{\mathrm{d}^2y(0,t)}{\mathrm{d}t^2}=-T\dfrac{\partial y(0,t)}{\partial x}$. En notation complexe, cette équation devient : $-m\omega^2\left[\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)+\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)\right]=-T\left[-jk\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)+jk\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)\right]$ soit $\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)\left[m\omega^2+Tjk\right]=\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)\left[-m\omega^2+Tjk\right]$ et finalement : $\boxed{\underline{r}=\dfrac{\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)}{\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)}=\dfrac{jTk+m\omega^2}{jTk-m\omega^2}}$.

c) • Cas $m\to 0$, c'est-à-dire si l'extrémité de la corde est <u>libre</u> : $\boxed{r\to 1}$.
• Cas $m\to\infty$, c'est-à-dire si l'extrémité de la corde est <u>fixée</u> : $\boxed{r\to -1}$.

d) On suppose $y(0,t)=0,\forall t$. Cela équivaut à $\underline{A}(0)=\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)+\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)=0$ soit $\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)=-\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)$, d'où $\boxed{r=-1}$.
Or $\underline{A}_{\mathrm{r}}(x)=\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)\exp(+jkx)$ et $\underline{A}_{\mathrm{i}}(x)=\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)\exp(-jkx)$, donc $\underline{A}(x)=\underline{A}_{\mathrm{r}}(0)\left[\exp(+jkx)-\exp(-jkx)\right]=-2j\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)\sin(kx)$.
L'onde réelle est alors : $y(x,t)=\mathrm{Re}\left[\underline{A}(x)\exp(j\omega t)\right]=\mathrm{Re}\left[-2j\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)\sin(kx)\exp(j\omega t)\right]=\mathrm{Re}\left[-2jA\exp(j\varphi)\sin(kx)\exp(j\omega t)\right]$ soit $y(x,t)=\mathrm{Re}\left[2A\exp(j(\omega t+\varphi-\pi/2))\sin(kx)\right]=2A\cos(\omega t+\varphi-\pi/2)\sin(kx)$ et finalement $\boxed{y(x,t)=2A\sin(\omega t+\varphi)\sin(kx)}$ (on pourrait renommer $2A$ en A, et remplacer le sinus temporel par un cosinus en changeant l'origine des temps). On reconnaît la forme caractéristique d'une <u>onde stationnaire</u> : produit *réel* d'une fonction sinusoïdale temporelle et d'une fonction sinusoïdale spatiale.

¤ Exercice 5

a) On applique le PFD à l'atome numéroté n, soumis aux forces d'interaction avec ses deux voisins (on néglige le poids) : $m\vec{a}=\vec{F}_{(n-1)\to n}+\vec{F}_{(n+1)\to n}$. Chaque force, modélisée comme celle d'un ressort, s'exprime selon la formule générale $\vec{F}=-K(\ell-\ell_0)\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}}$. Pour le ressort de gauche : $\ell_0=a$, $\ell=a+\xi_n-\xi_{n-1}$ et $\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}}=\vec{e_x}$ donc $\vec{F}_{(n-1)\to n}=-K(\xi_n-\xi_{n-1})\vec{e_x}$. Pour celui de droite : $\ell_0=a$, $\ell=a+\xi_{n+1}-\xi_n$ et $\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}}=-\vec{e_x}$ donc $\vec{F}_{(n+1)\to n}=+K(\xi_{n+1}-\xi_n)\vec{e_x}$.
La projection du PFD sur $\vec{e_x}$ est donc : $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2}=-K(\xi_n-\xi_{n-1})+K(\xi_{n+1}-\xi_n)}$.

b) $\xi((n+1)a,t)=\xi(na,t)+a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$ et $\xi((n-1)a,t)=\xi(na,t)-a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$.

c) L'équation devient : $m\dfrac{\partial^2\xi(na,t)}{\partial t^2}=-K\left(\xi(na,t)-\xi((n-1)a,t)\right)+K\left(\xi((n+1)a,t)-\xi(na,t)\right)$

$=-K\left(\cancel{a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)}-\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)\right)+K\left(\cancel{a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)}+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)\right)=Ka^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$ soit $\boxed{\dfrac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}=0}$ où $\boxed{c=a\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$: c'est la <u>célérité</u> de l'onde.

d) Avec un modèle macroscopique on a trouvé $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$. Or on a établi (voir cours) la relation $E=\dfrac{k}{a}$, et d'autre part $\rho=\dfrac{m}{a^3}$ (car chaque maille cubique de côté a contient un atome de masse m), donc les deux expressions sont bien identiques.