On2 – Corrigé des exercices 2, 3, 4

¤ Exercice 2

a) D'après le contenu des exponentielles, et en supposant les facteurs k positifs : l'onde 1 se propage selon l'axe (Oz) vers les z croissants, l'onde 2 selon l'axe (Oz) vers les z décroissants, les ondes 3 et 5 selon l'axe (Ox) vers les x croissants, l'onde 4 selon l'axe (Ox) vers les x décroissants, et l'onde 6 selon une direction diagonale entre les axes (Ox) et (Oy), vers les x et y croissants.

$\underline{\overrightarrow{E_1}}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{e_y}$ donc le champ réel est $\boxed{\overrightarrow{E_1}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y}}$: il y a une seule composante, l'onde 1 est de <u>polarisation rectiligne</u>.

$\underline{\overrightarrow{E_2}}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t + kz)}\left(\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y}\right)$ donc $\boxed{\overrightarrow{E_2}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_y} + 2E_0 \cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_y}}$: les deux composantes sont en phase, l'onde 2 est de <u>polarisation rectiligne</u> (dans une direction inclinée par rapport aux deux axes).

$\underline{\overrightarrow{E_3}}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{e_y} + iE_0 e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{e_z} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{e_y} + E_0 e^{i(\omega t - kx + \pi/2)}\overrightarrow{e_z}$ (puisque $i = e^{i\pi/2}$) donc le champ réel est $\boxed{\overrightarrow{E_3}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y} + E_0\cos(\omega t - kx + \pi/2)\overrightarrow{e_z} = E_0\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y} - E_0 \sin(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}}$: les deux composantes sont en quadrature de phase et de même amplitude, l'onde 3 est de <u>polarisation circulaire</u> ; on peut préciser <u>droite</u> car le vecteur $\overrightarrow{E_3}(M,t)$ tourne dans le sens horaire dans le plan (Oyz), si on regarde ce plan depuis le côté positif de l'axe (Ox) [on reçoit l'onde].

De même $\boxed{\overrightarrow{E_4}(M,t) = E_0\cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_y} + 2E_0\cos(\omega t + kx + \pi/2)\overrightarrow{e_z} = E_0 \cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_y} - 2E_0\sin(\omega t + kx)\overrightarrow{e_z}}$, le champ $\overrightarrow{E_4}(M,t)$ tourne de la même manière dans le plan (Oyz), mais on doit cette fois le regarder depuis le côté négatif de l'axe (Ox), on le voit alors tourner dans le sens trigonométrique ; par ailleurs les amplitudes sont différentes, l'onde 4 est donc de <u>polarisation elliptique gauche</u>, le grand axe de l'ellipse étant selon (Oz).

De même $\boxed{\overrightarrow{E_5}(M,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y} + E_0\cos(\omega t - kx + \pi/4)\overrightarrow{e_z}}$: les amplitudes sont les mêmes mais le déphasage est quelconque, l'onde 5 est donc de <u>polarisation elliptique gauche</u>, le grand axe de l'ellipse étant incliné.

Enfin $\boxed{\overrightarrow{E_6}(M,t) = E_0\cos(\omega t - k_x x - k_y y)\overrightarrow{e_z}}$: il y a une seule composante, l'onde 6 est de <u>polarisation rectiligne</u>.

b) $\overrightarrow{B_1}(M,t) = \dfrac{\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{E_1}(M,t)}{\omega} = \dfrac{+k\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{E_1}(M,t)}{\omega}$ soit $\boxed{\overrightarrow{B_1}(M,t) = -\dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}}$. $\overrightarrow{\Pi_1}(M,t) = \dfrac{\overrightarrow{E_1}(M,t) \wedge \overrightarrow{B_1}(M,t)}{\mu_0}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\Pi_1}(M,t) = +\dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}}$ (qui est bien orienté dans le sens de propagation).

¤ Exercice 3

a) Équation d'Euler linéarisée : $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}}$. Équation de conservation de la masse et compressibilité : $\boxed{\chi_S \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}$.

b) Une onde stationnaire vérifiant l'équation de D'Alembert (donc harmonique) est de la forme : $\boxed{p(x,t) = A\cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)}$.

Alors $\rho_0 \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$ équivaut à $\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = +\dfrac{1}{\rho_0} Ak\sin(kx+\psi)\cos(\omega t + \varphi)$, d'où en intégrant par rapport à t :

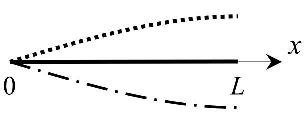
$\boxed{v_x(x,t) = \dfrac{Ak}{\rho_0 \omega}\sin(kx+\psi)\sin(\omega t+\varphi) = \dfrac{A}{\rho_0 c}\sin(kx+\psi)\sin(\omega t + \varphi)}$. La « constante » d'intégration (fonction de x seul) est nulle puisqu'il n'y a pas de champ de vitesse stationnaire en dehors de l'onde.

c) En $x = 0$, l'air ne peut pas vibrer car il est bloqué par l'extrémité fermée, donc $\boxed{v_x(0,t) = 0}$. Cela donne $\sin\psi = 0$, on peut donc prendre $\psi = 0$. En $x = L$, l'énoncé indique que $p(L^+,t) = 0$ (surpression négligeable à l'extérieur), or la pression est continue dans l'espace, donc la surpression aussi : $\boxed{p(L^-,t) = p(L^+,t) = 0}$. Cela donne $\boxed{\cos(kL) = 0}$ (et non $\sin(kL) = 0$ comme on l'a rencontré souvent). La pulsation spatiale k est donc quantifiée : $kL = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ avec n entier, soit $\boxed{k_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2L}}$, et la fréquence temporelle l'est donc également : $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{kc}{2\pi}$, soit $\boxed{f_n = (2n+1)\dfrac{c}{4L}}$. La fréquence fondamentale est donc $\boxed{f_0 = \dfrac{c}{4L}}$, et le spectre ne comporte que des <u>harmoniques impairs</u>. Ceci est bien vérifié sur le spectre expérimental : le fondamental est à la fréquence $f_0 = 293{,}6$ Hz (note *ré*), et les harmoniques non négligeables sont aux fréquences $f_1 = 881\text{ Hz} = 3f_0$, $f_2 = 1469\text{ Hz} = 5f_0$ et $f_3 = 2056\text{ Hz} = 7f_0$.

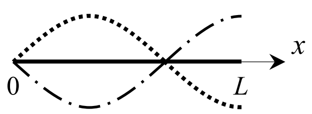
d) On a représenté ci-dessous l'onde de déplacement $\xi(x,t)$ à trois instants.

t_1 ········ $t_2 = t_1 + T/4$ ——— $t_3 = t_1 + T/2$ – · – ·

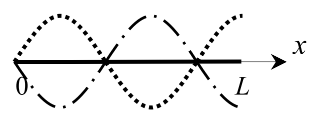
Fondamental (f_0)



Harmonique de rang 3 ($f_1 = 3f_0$)



Harmonique de rang 5 ($f_2 = 5f_0$)



L'extrémité $x = 0$ est un nœud de déplacement, l'extrémité $x = L$ est un ventre de déplacement.
Pour la surpression, c'est l'inverse, puisque son expression contient $\cos(kx)$ au lieu de $\sin(kx)$.

¤ Exercice 4

a) On a établi en cours : $\boxed{\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$.

b) $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ équivaut à $\boxed{\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial t^2} = 0}$ (on fait entrer r dans la dérivée temporelle puisque r et t sont deux variables indépendantes). Il s'agit bien de l'équation de D'Alembert unidimensionnelle pour la fonction $r\,p(r,t)$. Solution en onde (sphérique) progressive harmonique : $r\,p(r,t) = A\cos(\omega t - k\,r + \varphi)$ d'où $\boxed{p(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - k\,r + \varphi)}$.

Pour obtenir la relation de dispersion, on injecte cette forme dans l'équation de D'Alembert :

$\frac{1}{r}\left(-k^2 A\cos(\omega t - k\,r + \varphi)\right) - \frac{1}{c^2}\frac{A}{r}\left(-\omega^2\cos(\omega t - k\,r + \varphi)\right) = 0$ d'où $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$ soit $k = \frac{\omega}{c}$ si on prend $k > 0$ (onde divergente).

c) On part de l'équation de Navier–Stokes linéarisée : $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = -\frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{e_r} = -\left(-\frac{A}{r^2}\cos(\omega t - k\,r + \varphi) + \frac{A}{r}k\sin(\omega t - k\,r + \varphi)\right)\overrightarrow{e_r}$

d'où en intégrant par rapport au temps : $\boxed{\vec{v}(M,t) = \frac{A}{\rho_0 \omega}\left(\frac{1}{r^2}\sin(\omega t - k\,r + \varphi) + \frac{k}{r}\cos(\omega t - k\,r + \varphi)\right)\overrightarrow{e_r}}$.

Pour $r \gg \lambda$: $\frac{k}{r} = \frac{2\pi}{r\lambda} \gg \frac{1}{r^2}$ donc $\boxed{\vec{v}(M,t) \approx \frac{Ak}{\rho_0 \omega r}\cos(\omega t - k\,r + \varphi)\overrightarrow{e_r}}$ $\left(\text{le terme en } \frac{1}{r^2} \text{ devient négligeable}\right)$.

Pour une voix dans l'air, $f \approx 200\ \mathrm{Hz}$ et $c = 340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ d'où $\lambda = \frac{c}{f} \approx 2\ \mathrm{m}$: l'approximation $r \gg \lambda$, ou plus exactement $r \gg \frac{\lambda}{2\pi} \approx 0{,}3\ \mathrm{m}$, est valable à partir d'une dizaine de mètres.

d) Le niveau sonore est défini par : $L_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{I}{I_0}$ avec $I = \langle \vec{\Pi}\cdot\vec{n}\rangle = \langle p\vec{v}\cdot\overrightarrow{e_r}\rangle = \langle p v_r\rangle = \left\langle \frac{A^2 k}{\rho_0 \omega r^2}\cos^2(\omega t - k\,r + \varphi)\right\rangle = \frac{A^2 k}{2\rho_0 \omega r^2}$. On peut donc séparer la contribution de la distance r : $L_{\mathrm{dB}} = \mathrm{cte} - 20\log r$. Pour deux distances $r_1 = 10\ \mathrm{m}$ et $r_2 = 30\ \mathrm{m}$, $\boxed{L_{\mathrm{dB},1} - L_{\mathrm{dB},2} = 20\log\frac{r_2}{r_1}}$, donc $\boxed{L_{\mathrm{dB},2} = 40 - 20\log 3 = 30\ \mathrm{dB}}$.
