

Devoir test de physique n° 6

Cet énoncé comporte trois problèmes. Durée : 4 heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Problème 1 Transmission d'énergie électrique sans fil

L'électricité de demain pourra-t-elle se passer de fils électriques ? La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil, inspirés des travaux pionniers de Nikola Tesla au début du XX^e siècle. Les applications sont nombreuses et touchent divers domaines (voir figure 1) : de l'usage domestique (recharge d'appareils avec batteries, alimentation de petits appareils courants) au monde industriel (recharge de voitures électriques, applications diverses de la transmission de puissance, pour les trains par exemple), en passant par la médecine (apport d'énergie électrique aux implants, sans effectuer d'opérations chirurgicales lourdes).



FIGURE 1 – Quelques applications de la transmission d'énergie sans fil, de gauche à droite : recharge de téléphone portable, recharge sans fil d'une voiture Nissan Leaf[®], pacemaker.

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission de puissance sans fil. Citons notamment le couplage inductif non résonant en champ proche, le couplage inductif résonant en champ proche (voir figure 2) et le rayonnement en champ lointain (voir figure 3). Les caractéristiques, avantages et inconvénients de ces techniques sont donnés dans le tableau ci-après. Nous développerons dans cette partie certains aspects du couplage inductif, non résonant puis résonant.



FIGURE 2 – À gauche : couplage inductif non résonant en champ proche ; à droite : couplage inductif résonant en champ proche.

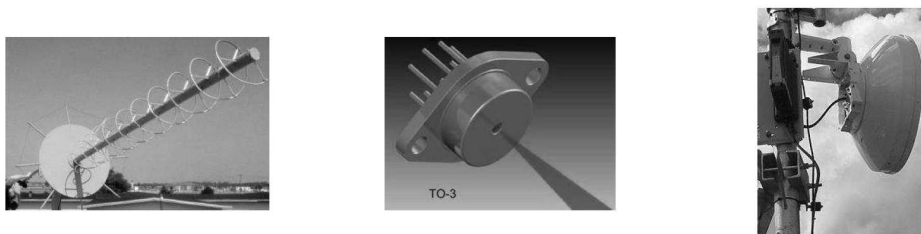


FIGURE 3 – Quelques dispositifs de rayonnement en champ lointain, de gauche à droite : antenne à forte directivité, diode laser, antenne micro-onde.

Mentionnons que le transfert de puissance sans fil par couplage résonant a été récemment mis en évidence par l'équipe de recherche dirigée par Marin Soljačić, au *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), en réalisant une transmission de puissance de 60 W avec une distance de 2 m séparant les deux

bobinages, permettant d'allumer une ampoule (voir figure 2). Ces travaux performants ont donné lieu à une publication dans la revue Science en 2007. C'est à cette occasion que le terme « witrlicity », contraction de Wireless Electricity, est apparu.

	Couplage non résonant	Couplage résonant	Rayonnement
Matériel nécessaire	bobines	bobines	antenne à grande directivité
Type de champ	magnétique	magnétique	électrique
Distance de transmission	faible	faible/moyenne	moyenne/grande
Puissance transmissible	faible	moyenne	moyenne/grande
Interactions avec le milieu	faible	faible	forte
Sécurité	élevée	élevée	potentiellement dangereux

TABLE 1 – Comparaison des différentes techniques.

COUPLAGE INDUCTIF NON RÉSONANT

A / Étude des bobines utilisées

Pour établir un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » 2D (voir figure 4).



FIGURE 4 – Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur ℓ et d'axe de révolution Oz , comportant N spires circulaires jointives de rayon a , et parcourues par un courant d'intensité variable $i(t)$. On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

A1. Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique \vec{B} . Comment se simplifient-elles dans l'ARQS ?

A2. Dans le cadre de l'ARQS, indiquer comment on passe de l'équation locale concernée au théorème d'Ampère.

On suppose dans la suite le solénoïde « infini » et on cherche à exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

A3. Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde « infini » vous semble-t-elle légitime ?

A4. En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ $\vec{B}(M)$, ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

A5. En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choisissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de ℓ , N et $i(t)$.

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz , de cote $z > 0$.

A6. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .

A7. Que dire du plan d'équation $z = 0$ d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre $B_z(-z)$ et $B_z(z)$.

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine « plate » au point M :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2 (z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

A8. Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,\max}$, et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z,\max}/2$, en fonction de a .

On donne sur la figure 5 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine « plate », simulées à l'aide du logiciel FEMM (*Finite Element Method Magnetics*).

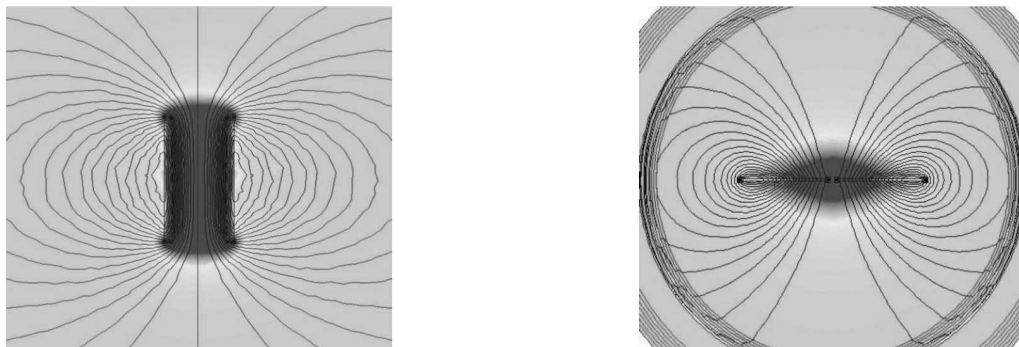


FIGURE 5 – Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine « plate » (à droite).

A9. Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.

A10. Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ? Quelle propriété, relative au flux du champ \vec{B} , permet de le confirmer ?

B / Transfert de puissance : rendement de Yates

Modélisons à présent le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées sur la figure 6.



FIGURE 6 – À gauche : système de transmission classique (émetteur et récepteur) utilisé dans les chargeurs sans fil actuels. À droite : schéma et notations utilisées.

Une bobine émettrice « plate », de résistance électrique R_1 et d'inductance propre L_1 , comportant N_1 spires circulaires de rayon a , est parcourue par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

imposé par un générateur (non représenté sur la figure 6).

B1. Définir et exprimer la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur, notée $P_{\text{reçue}}$, en fonction de L_1 , R_1 , de l'intensité $i(t)$ et de sa dérivée di/dt . En déduire la moyenne temporelle de cette puissance $\langle P_{\text{reçue}} \rangle$ en fonction de R_1 et I_0 .

Considérons également une bobine réceptrice « plate », de résistance électrique R_2 , d'inductance propre L_2 et comportant N_2 spires circulaires de rayon b , située à une distance d de la bobine émettrice. On cherche à définir et exprimer le rendement de transfert de puissance entre les deux bobines, dans le cas d'un alignement parfait. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice en un point $M(z)$ de l'axe Oz :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2 (z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_z.$$

Pour simplifier, on suppose ce champ magnétique uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

B2. Exprimer le flux Φ du champ magnétique créé par la bobine émettrice à travers la bobine réceptrice, en fonction de $i(t)$, a , b , d , N_1 et N_2 .

B3. Le courant $i(t)$ étant variable, il apparaît une force électromotrice (fem) $e(t)$ aux bornes de la bobine réceptrice. Quel phénomène est ainsi mis en évidence ? Donner l'équation locale de Maxwell à l'origine de celui-ci.

B4. Après avoir nommé la loi utilisée, exprimer la fem $e(t)$ en fonction de I_0 , ω , t , a , b , d , N_1 et N_2 . On négligera le flux magnétique propre du circuit récepteur devant le flux extérieur.

B5. En négligeant l'inductance propre L_2 de la bobine réceptrice, en déduire la puissance reçue par cette dernière de la part de la bobine émettrice, notée $P_{\text{généré}}$, puis sa moyenne temporelle $\langle P_{\text{généré}} \rangle$ en fonction de I_0 , ω , a , b , d , N_1 , N_2 et R_2 .

On définit le rendement de transmission de puissance par le quotient :

$$\eta = \frac{\langle P_{\text{généré}} \rangle}{\langle P_{\text{reçue}} \rangle}.$$

B6. Montrer que le rendement peut se mettre sous la forme :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$$

avec k un coefficient sans dimension à expliciter. Ce résultat constitue la loi de Yates.

C / Modélisation du couplage : inductance mutuelle

On propose dans cette sous-partie une modélisation plus générale du couplage magnétique, s'affranchissant des hypothèses faites dans la sous-partie précédente. Le couplage est quantifié par l'inductance mutuelle M entre les deux bobines, d'inductances propres respectives L_1 et L_2 (voir figure 7).

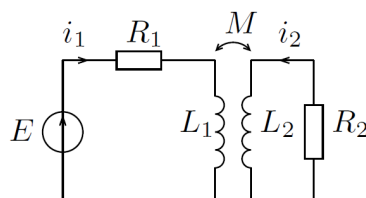


FIGURE 7 – Circuits couplés par mutuelle inductance.

- C1.** Rappeler la définition de M , ainsi que sa dimension.
- C2.** En appliquant la loi des mailles dans chacun des deux circuits, établir le système d'équations électriques couplées vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
- C3.** Montrer que ce système d'équations conduit au bilan de puissance

$$Ei_1 = R_1i_1^2 + R_2i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt}$$

avec \mathcal{E}_{mag} une quantité à exprimer en fonction de L_1 , L_2 , M , i_1 et i_2 . Interpréter ce bilan.

- C4.** On pose la variable adimensionnée $x = i_1/i_2$. Mettre \mathcal{E}_{mag} sous la forme

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x)$$

où $P(x)$ est un polynôme d'ordre 2 que l'on explicitera.

- C5.** En admettant que \mathcal{E}_{mag} est une quantité positive, montrer que l'inductance mutuelle vérifie une inégalité de la forme $M \leq M_{\text{max}}$. Exprimer son majorant M_{max} en fonction de L_1 et L_2 .
- C6.** Connaissez-vous d'autres applications de tels circuits couplés par mutuelle induction dans les domaines de l'industrie et de la vie courante ? Deux applications détaillées sont attendues.

D / Résultats expérimentaux

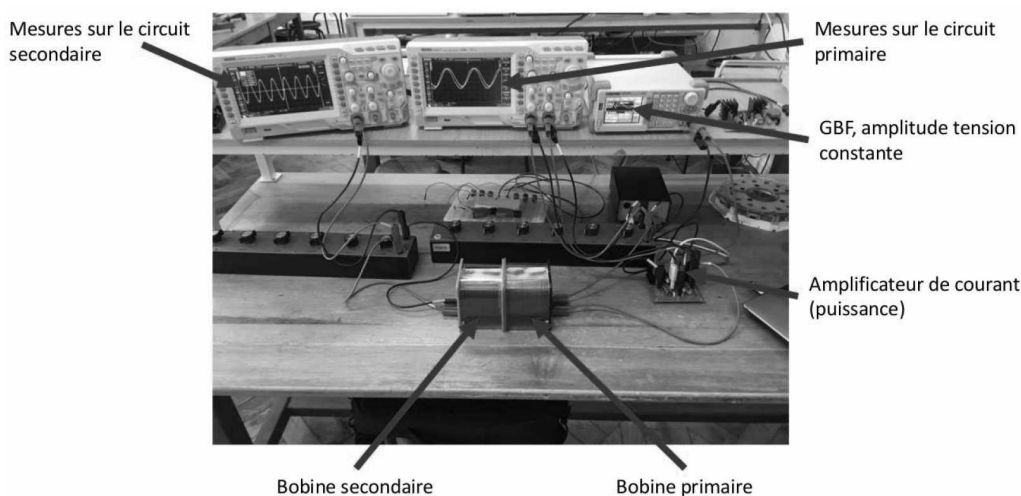


FIGURE 8 – Photographie légendée du montage expérimental.

On cherche à tester expérimentalement, à partir de matériel usuel de travaux pratiques (voir figure 8), la prédiction théorique de Yates obtenue à la question **B6** :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$$

Un générateur basse fréquence (GBF), délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f , alimente un circuit composé d'une bobine émettrice d'inductance $L = 0,86$ mH, dite « bobine primaire », et d'une résistance. Un amplificateur de courant permet d'augmenter la puissance fournie à la bobine émettrice. On place à une distance d de la bobine émettrice une bobine réceptrice identique, dite « bobine secondaire », mise en série avec une résistance. Deux oscilloscopes permettent de mesurer les puissances moyennes reçues par les bobines émettrice et réceptrice. Les bobines étant accolées, on étudie

tout d'abord la variation du rendement η avec la fréquence f imposée par le GBF, tous les autres paramètres demeurant constants (voir figure 9).

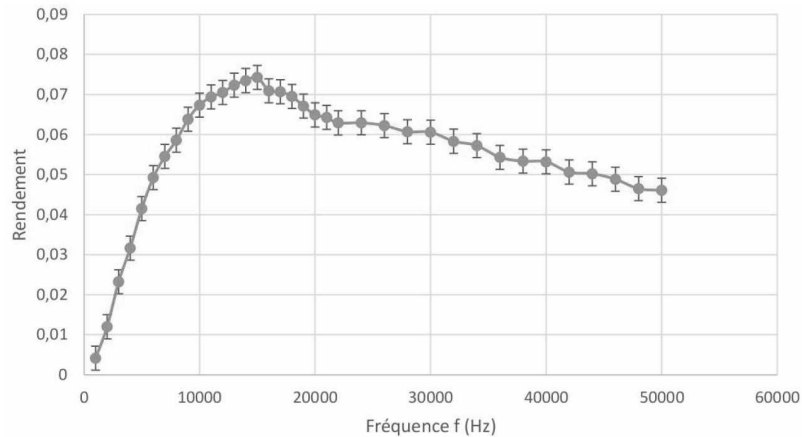


FIGURE 9 – Évolution du rendement en fonction de la fréquence.

D1. Estimer le rendement expérimental maximal η_{\max} , ainsi que la fréquence f_{\max} à laquelle celui-ci est atteint.

D2. Quel comportement en fréquence pouvait-on prévoir par la loi théorique de Yates ? Ce comportement est-il vérifié expérimentalement ? On pourra distinguer le cas des basses et hautes fréquences.

En réalité, chaque bobine souffre d'effets capacitifs associés aux différents matériaux isolants séparant les spires. On propose de déterminer un ordre de grandeur de cette capacité parasite C_p .

D3. Rappeler l'expression de la pulsation propre ω_0 d'un oscillateur électronique LC en fonction de L et C .

D4. En supposant que le rendement soit maximal pour la pulsation ω_0 , en déduire la valeur de C_p .

On cherche ensuite à sonder expérimentalement l'influence d'un désalignement des bobines sur le rendement. Les résultats sont présentés sur la figure 10.

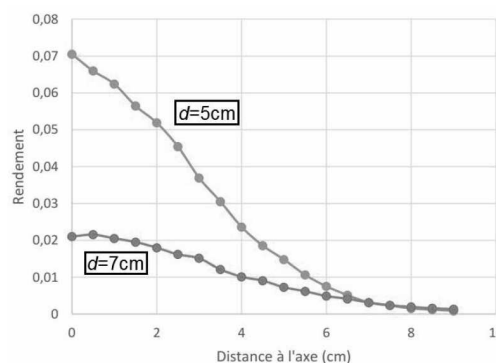
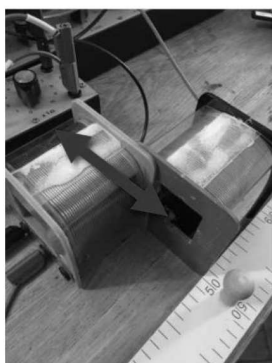


FIGURE 10 – Évolution du rendement en fonction du désalignement entre les bobines. Chaque série de mesures est effectuée à écartement longitudinal entre bobines d fixé.

D5. Interpréter l'évolution observée. Justifier qualitativement que l'effondrement du rendement soit plus important lorsque d est petit.

On sonde enfin l'influence de l'orientation relative des bobines sur le rendement. Les résultats sont reportés sur la figure 11.

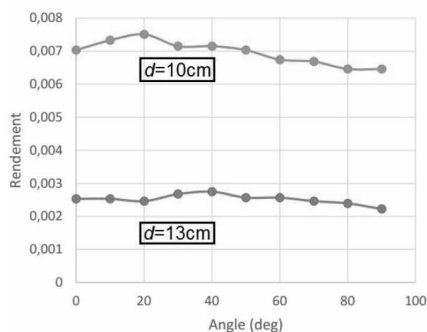


FIGURE 11 – Évolution du rendement en fonction de l'angle entre les bobines.

D6. Commenter les résultats obtenus. Proposer une justification qualitative, en lien avec les cartes de champ représentées sur la figure 5, permettant de comprendre le contraste avec les résultats obtenus à la question **D5**.

Problème 2 Transmission par câble coaxial

Depuis l'installation de lignes télégraphiques sous-marines, l'obligation d'isoler la ligne conduit à utiliser une forme géométrique particulière : le câble est coaxial, formé d'une armature centrale métallique formant un cylindre de rayon a , entouré d'une gaine isolante et d'un second câble métallique de rayon $b > a$. Les photographies de la figure 2 représentent les extrémités dénudées de deux câbles de ce type qui relient la télévision à l'antenne ; quelques éléments de la fiche technique du plus performant des deux sont repris dans la table 1.

Un tel câble est d'abord modélisé comme un milieu continu sans pertes caractérisé par une inductance linéique l_u et une capacité linéique c_u .

□ – 7. Représenter le schéma équivalent à une longueur infinitésimale dz du câble. Établir les équations de propagation des ondes de courant et de tension.

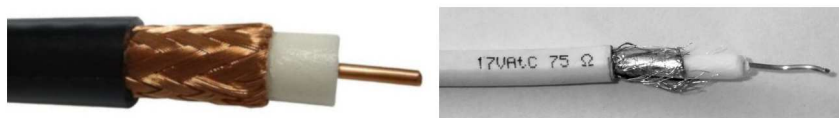


FIGURE 2 – Câble coaxial professionnel (à gauche) et bas de gamme (à droite)

Conducteur interne :	cuivre, $\varnothing 1,6$ mm	Impédance :	75Ω
Isolant :	Polyéthylène, $\varnothing 7,2$ mm	Capacité nominale :	53 pF/m
Tresse externe :	cuivre, couverture $> 95\%$	Inductance nominale :	$0,32$ μ H/m
Gaine :	Polyéthylène	Résistance nominale câble :	$8,5$ Ω /km
Délai :	$4,0$ ns/m	Résistance nominale tresse :	$3,6$ Ω /km

TABLE 1 – Extraits de la fiche technique du câble Belden 8213

- – 8. Définir, exprimer, calculer et commenter la célérité de propagation des ondes électriques dans le câble Belden 8213. Comparer au « délai » de la fiche technique.
- – 9. Définir et exprimer l'impédance caractéristique Z_0 du câble. Les données de la fiche technique ci-dessus sont-elles compatibles avec ce modèle ?

Lorsqu'un tel câble relie un générateur (par exemple l'antenne de réception du signal TV) à un récepteur (ici, l'étage d'entrée de l'amplificateur TV) modélisé par une impédance complexe \bar{Z}_e en $z = 0$ sur la figure 3, on observe en général la superposition d'ondes de tension et de courant incidente et réfléchie, donc la superposition d'une onde strictement progressive, d'amplitude $u_p = U_p \cos(\omega t - kz + \varphi_p)$ et d'une onde stationnaire, d'amplitude $u_s = U_s \cos(\omega t - \varphi_s) \sin(kz - \psi_s)$. L'importance de cette dernière est caractérisée par le rapport $\rho = U_s/U_p$, qui peut être mesuré pour indiquer le degré de désaccord entre le câble et sa charge.

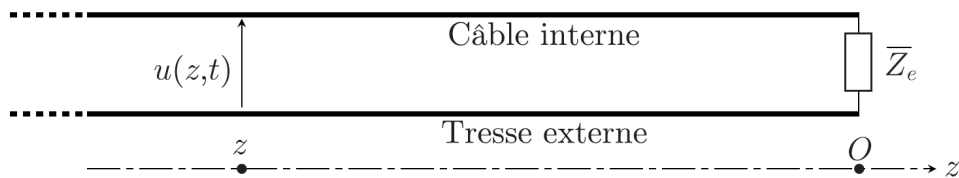


FIGURE 3 – Câble TV alimentant un étage électronique

- – 10. On impose d'abord dans la partie $z < 0$ du câble une onde de tension incidente $\bar{u}_+(z,t)$ d'amplitude complexe \bar{U}_+ , de pulsation ω et de vecteur d'onde k .
 Exprimer l'onde de courant $\bar{i}_+(z,t)$ associée en fonction de Z_0 , \bar{U}_+ , k et ω .
 Exprimer les ondes de tension $\bar{u}_-(z,t)$ et de courant $\bar{i}_-(z,t)$ réfléchies par le câble en fonction de \bar{Z}_e , Z_0 , \bar{U}_+ , k et ω .
- – 11. Exprimer ρ en fonction de Z_0 et \bar{Z}_e . À quelle condition aura-t-on $\rho = 0$? On parle dans ce cas d'adaptation (ou accord) entre le câble et sa charge.

Problème 3

Produire de la musique avec des fils d'araignée

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module de Young, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée *Nephila pilipes*, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien sûr inférieure à sa tension de rupture T_r , mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ de masse linéique μ , autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note $z(x,t)$ le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz (Fig. 8). Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée : $\vec{T}(x,t) = T_x(x,t)\hat{e}_x + T_z(x,t)\hat{e}_z$.

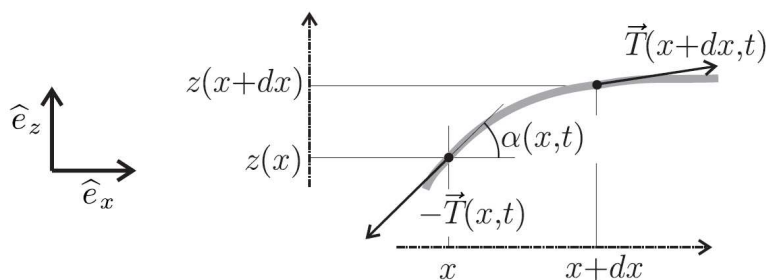


FIGURE 8 – Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

- La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle $\alpha(x,t)$ que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir Fig. 8), ce qui entraîne : $|\frac{\partial z}{\partial x}| \ll 1$;
- On néglige les effets de la pesanteur.

□ – 15. On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Exprimer la longueur de portion de fil ds , $\cos[\alpha(x,t)]$ et $\sin[\alpha(x,t)]$ en fonction de dx et $\frac{\partial z}{\partial x}$.

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x,t)$ ne dépend pas de x .

Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

□ – 16. Montrer que le déplacement du fil $z(x,t)$ vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

On exprimera c en fonction de T et μ . Que représente cette grandeur physique ?

□ – 17. Montrer que des fonctions de la forme $z(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g .

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoïdal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme

$$\underline{z}(x,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, \underline{A} et \underline{B} des amplitudes complexes.

□ – 18. Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $\underline{z}(x,t)$.

En déduire la relation entre \underline{A} et \underline{B} ainsi que les valeurs de ω permises.

Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

□ – 19. Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est $\mu = 0,5 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-1}$, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ?

Sachant que la tension T_e au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 newtons, que pouvez vous conclure ?