

Corrigé du devoir test de physique n° 6**❖ Problème 1** (E3A PSI 2020)

A1. Équation de Maxwell–Thomson (ou Maxwell–flux) : $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$. Équation de Maxwell–Ampère : $\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$.

Dans l'ARQS magnétique, on néglige le dernier terme : $\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}}$.

A2. On écrit la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour fermé Γ (délimitant une surface S_Γ), et on la transforme à l'aide du théorème de Stokes : $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \mu_0 \iint_{S_\Gamma} \vec{j} \cdot \vec{n} ds$ soit $\boxed{\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}}$.

A3. Il faut que la longueur du solénoïde soit grande devant son rayon ($\ell \gg a$), et que le point M considéré ne soit pas trop proche d'une extrémité du solénoïde.

A4. Pour M quelconque de l'espace, le plan Π contenant M et orthogonal à (Oz) est un plan de symétrie pour les courants donc d'antisymétrie pour le champ, donc $\vec{B}(M) \perp \Pi$ soit $\vec{B}(M) = B_z \vec{u}_z$. De plus il y a invariance par rotation autour de (Oz) , donc B_z est indépendante de θ ; et invariance par translation selon (Oz) , donc B_z est indépendante de z . Il reste donc finalement $\boxed{\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{u}_z}$.

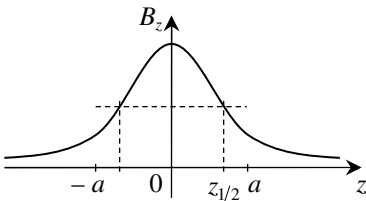
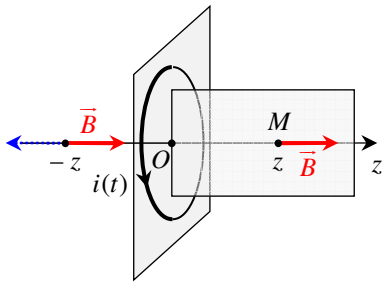
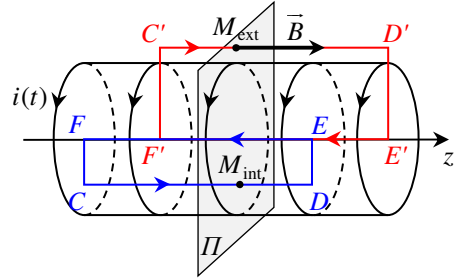
A5. Pour un point M à l'intérieur ($r < R$), appliquons le théorème d'Ampère à un rectangle $CDEF$ dans le plan (MOz) [en bleu en bas du schéma], parcouru dans le sens trigonométrique, avec le côté EF de longueur b sur l'axe :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \int_C^D B_z(r) \vec{u}_z \cdot d\vec{z} \vec{u}_z + \int_D^E B_z(r') \vec{u}_z \cdot d\vec{r}' \vec{u}_r + \int_E^F B_z(0) \vec{u}_z \cdot d\vec{z} \vec{u}_z + \int_F^C B_z(r') \vec{u}_z \cdot d\vec{r}' \vec{u}_r = +B_z(r)b + 0 - B_z(0)b + 0.$$

Or dans ce cas, $I_{\text{enlacée}} = 0$ donc $B_z(r) = B_z(0)$: le champ à la distance r est le même que sur l'axe, il est donc uniforme à l'intérieur.

Pour M à l'extérieur ($r > R$), on choisit de même un contour $C'D'E'F'$ [en rouge en haut du schéma], et cette fois $I_{\text{enlacée}} = -nbi(t)$ (sens contraire à celui de la normale au rectangle) avec $n = N/\ell$, donc $B_z(r) = B_z(0) - \mu_0 ni(t)$. Or on suppose que le champ est nul à

l'extérieur : $B_z(r) = 0$ donc $B_z(0) = \mu_0 ni(t)$. Finalement, pour tout point M à l'intérieur : $\boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{u}_z}$.



A6. Pour M sur l'axe (Oz) , tous les plans contenant (Oz) , donc M , sont des plans d'antisymétrie pour les courants donc de symétrie pour le champ : $\vec{B}(M)$ est parallèle à tous ces plans, donc à l'axe (Oz) , soit $\boxed{\vec{B}(M) = B_z \vec{u}_z}$.

A7. Le plan $z = 0$, ou (Oxy) , contient toutes les spires donc c'est un plan de symétrie pour les courants, et d'antisymétrie pour le champ. Alors pour deux points symétriques par rapport à ce plan, d'abscisses z et $-z$, $\vec{B}(-z)$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(z)$, donc identique : $\boxed{B_z(-z) = B_z(z)}$ (la fonction est paire).

A8. La fonction B_z est positive et tend vers 0 en $\pm\infty$.

Elle est maximale en 0 : $B_{z,\max} = B_z(0) = \frac{\mu_0 Ni(t)}{2a}$. $B_z(z_{1/2}) = \frac{B_{z,\max}}{2} = \frac{\mu_0 Ni(t)}{4a}$ équivaut à

$$2(z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2} = 4a^3, \text{ d'où } \boxed{z_{1/2} = a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0,77a}.$$

A9. Sur les deux cartes, on observe que le plan coupant la figure verticalement est un plan de symétrie pour les lignes de champ, qui sont toutes orientées dans le même sens : il s'agit en effet d'un plan contenant l'axe (Oz) , plan d'antisymétrie des courants.

Inversement, le plan coupant la figure horizontalement, c'est-à-dire (Oxy) , est un plan d'antisymétrie pour les lignes de champ (une symétrie par rapport à ce plan inverse les sens des lignes de champ), et un plan de symétrie pour les courants (parallèles à ce plan).

A10. Le resserrement des lignes de champ caractérise la zone de champ le plus intense; et le fait qu'elles soient parallèles indique un champ uniforme. Ces deux propriétés sont dues à la conservativité du flux du champ magnétique, liée à l'équation de Maxwell–flux.

B1. La puissance reçue par la bobine est $P_{\text{reçue}} = u i = (u_{R_1} + u_{L_1}) i$ soit $\boxed{P_{\text{reçue}} = R_1 i^2 + L_1 \frac{di}{dt}}$. Moyenne temporelle :

$$\langle P_{\text{reçue}} \rangle = R_1 I_0^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle - \omega L_1 I_0^2 \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle \text{ soit } \boxed{\langle P_{\text{reçue}} \rangle = \frac{1}{2} R_1 I_0^2} \text{ car } \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0.$$

$$\textbf{B2. } \Phi = \iint_{\text{bobine}} \vec{B} \cdot \vec{n} ds = N_2 \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot \vec{n} ds = N_2 \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \iint_S \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z ds \text{ soit } \boxed{\Phi = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 i(t) a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}}.$$

B3. Il s'agit du phénomène d'induction électromagnétique, décrit par l'équation de Maxwell–Faraday : $\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$.

B4. On utilise la loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ soit ici $\boxed{e(t) = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \omega I_0 \sin(\omega t)}$.

B5. La bobine 2 est parcourue par un courant d'intensité i_2 telle que $e(t) = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \approx R_2 i_2$. Donc $P_{\text{gén}} = e(t) i_2 = \frac{e(t)^2}{R_2}$ soit

$$P_{\text{gén}} = \left(\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 \omega I_0}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \right)^2 \frac{\sin^2(\omega t)}{R_2}. \text{ La moyenne du sinus carré vaut } \frac{1}{2} \text{ donc } \langle P_{\text{gén}} \rangle = \frac{1}{2R_2} \left(\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 \omega I_0}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \right)^2.$$

$$\text{B6. } \eta = \frac{\langle P_{\text{gén}} \rangle}{\langle P_{\text{reçue}} \rangle} = \frac{1}{2R_2} \left(\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2 \omega I_0}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \right)^2 \frac{2}{R_1 I_0^2} \text{ soit } \eta = \frac{\langle P_{\text{gén}} \rangle}{\langle P_{\text{reçue}} \rangle} = \frac{\pi^2 \mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{4R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}, \text{ ce qui correspond à } k = \frac{\pi^2}{4}.$$

C1. Le flux du champ créé par la bobine 1 à travers la bobine 2 s'écrit : $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$, et inversement $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$. M est une inductance, comme L , et s'exprime en henrys.

$$\text{C2. Circuit 1 : } L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = E. \text{ Circuit 2 : } L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0.$$

C3. On multiplie la première par i_1 et la seconde par i_2 : $E i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M \frac{di_2}{dt} i_1 + R_1 i_1^2$ et $L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \frac{di_1}{dt} i_2 + R_2 i_2^2 = 0$. Puis on

additionne membre à membre : $E i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M \left(\frac{di_2}{dt} i_1 + \frac{di_1}{dt} i_2 \right)$ soit $E i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d\epsilon_{\text{mag}}}{dt}$ en posant

$\epsilon_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$. La puissance instantanée fournie par le générateur ($E i_1$) est d'une part dissipée par les résistances ($R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$), d'autre part elle fait varier le stock d'énergie ϵ_{mag} emmagasinée dans les bobines.

$$\text{C4. } \epsilon_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = \frac{1}{2} i_2^2 \left(L_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} + L_2 + 2M \frac{i_1}{i_2} \right) \text{ soit } \epsilon_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x) \text{ avec } P(x) = L_1 x^2 + 2Mx + L_2.$$

C5. Si ϵ_{mag} est toujours positive, $P(x)$ ne s'annule jamais pour changer de signe : $\Delta = 4M^2 - 4L_1 L_2 \leq 0$, soit $M \leq \sqrt{L_1 L_2} = M_{\text{max}}$.

C6. Dans un transformateur de tension, utilisé dans les réseaux de distribution électrique, l'induction permet d'élever ou d'abaisser l'amplitude d'une tension sinusoïdale. Dans les systèmes de paiement ou d'identification sans contact, l'induction dans une bobine réceptrice (puce RFID) crée un champ qui est détecté par l'antenne émettrice/réceptrice. Le fonctionnement d'un détecteur (de véhicule, de métaux...) à boucle inductive est analogue, mais le « circuit » récepteur est dans ce cas une masse métallique. Dans un dispositif de chauffage par induction, le récepteur est également une masse métallique, dans laquelle l'effet recherché est l'effet Joule.

D1. On lit $\eta_{\text{max}} = 0,074 \pm 0,003$ pour la fréquence $f_{\text{max}} = 15 \pm 1 \text{ kHz}$.

D2. D'après la loi de Yates, le rendement doit augmenter avec la fréquence (de façon quadratique). Expérimentalement, cet effet est correctement vérifié en basses fréquences (jusqu'à f_{max} , quoique ce soit plutôt linéaire), mais n'est plus vérifié en hautes fréquences.

D3. Formule classique : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

D4. On suppose $\omega_0 = 2\pi f_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{LC_p}}$ d'où $C_p = \frac{1}{4\pi^2 L f_{\text{max}}^2}$. AN $C_p = 0,13 \mu\text{F}$ (valeur de capacité moyenne usuelle).

D5. D'après les cartes de lignes de champ, quand la bobine 2 s'écarte latéralement par rapport à l'axe de la bobine 1, les lignes de champ qui la traversent sont de plus en plus inclinées par rapport à son axe, donc le flux diminue (car $\vec{u}_z \cdot \vec{n}$ diminue), et le rendement aussi. Cet effet est d'autant plus grand que la distance est plus faible : à plus grande distance, les lignes de champ tournent moins.

D6. Comme les lignes de champ tournent, même lorsque la bobine 2 est inclinée il y a toujours des lignes de champ qui la traversent à angle droit, donc le flux reste sensiblement le même.

⌘ Problème 2 (Mines-Ponts PSI 2021)

7. Loi des mailles : $u(z+dz, t) + \ell_u dz \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - u(z, t) = 0$ d'où $\frac{\partial u}{\partial z} + \ell_u \frac{\partial i}{\partial t} = 0$.

Loi des nœuds : $i(z, t) - i(z+dz, t) - c_u dz \frac{\partial u(z+dz, t)}{\partial t} = 0$ d'où $\frac{\partial i}{\partial z} + c_u \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

avec $c_u dz \frac{\partial u(z+dz, t)}{\partial t} \approx c_u dz \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}$ à l'ordre 1.

On dérive la première par rapport à z et la seconde par rapport à t : $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \ell_u \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = 0$ et $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} + c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Or $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t}$ donc on

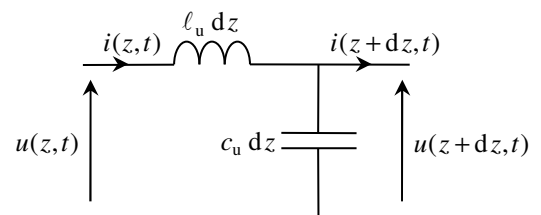
obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \ell_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. En inversant les deux dérivations, on obtient de même $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \ell_u c_u \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$.

8. On a obtenu des équations de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (D'Alembert) en introduisant la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\ell_u c_u}}$. Il s'agit de la vitesse

de propagation de ces ondes sur le câble. AN $c = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse a bien l'ordre de grandeur attendu pour une onde électromagnétique. La durée de parcours par mètre est $d = 1/c = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}$, ce qui correspond bien au délai indiqué.

9. On cherche une relation de la forme $u(z, t) = Z_0 i(z, t)$ pour une onde progressive dans le sens des z croissants. Pour cela, on injecte leurs expressions $u(z, t) = U_m \cos(\omega t - kz + \varphi_u)$ et $i(z, t) = I_m \cos(\omega t - kz + \varphi_i)$ dans l'une des équations couplées :

$\frac{\partial u}{\partial z} + \ell_u \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow -\omega U_m \sin(\omega t - kz + \varphi_u) + \ell_u k I_m \sin(\omega t - kz + \varphi_i) = 0$ d'où $\varphi_u = \varphi_i$ et $U_m = \frac{\ell_u k}{\omega} I_m = \frac{\ell_u}{c} I_m = \sqrt{\frac{\ell_u}{c_u}} I_m$, ce qui donne



bien $u(z, t) = Z_0 i(z, t)$ en posant $Z_0 = \sqrt{\frac{\ell_u}{c_u}}$. AN $Z_0 = 78 \Omega$. Cela correspond approximativement à la valeur indiquée (à 4 % près).

10. $\bar{u}_+(z, t) = \bar{U}_+ \exp[j(\omega t - kz)]$ et $\bar{i}_+(z, t) = \frac{\bar{U}_+}{Z_0} \exp[j(\omega t - kz)]$; $\bar{u}_-(z, t) = \bar{U}_- \exp[j(\omega t + kz)]$ et $\bar{i}_-(z, t) = -\frac{\bar{U}_-}{Z_0} \exp[j(\omega t + kz)]$.

De plus on a une condition aux limites : $\bar{u}(0, t) = \bar{Z}_e \bar{i}(0, t)$ soit $\bar{u}_+(0, t) + \bar{u}_-(0, t) = \bar{Z}_e [\bar{i}_+(0, t) + \bar{i}_-(0, t)]$. En injectant les formes des quatre fonctions, et en simplifiant par $\exp(j\omega t)$, on obtient : $\bar{U}_+ + \bar{U}_- = \bar{Z}_e \left[\frac{\bar{U}_+}{Z_0} - \frac{\bar{U}_-}{Z_0} \right]$, d'où $\bar{U}_- = \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \bar{U}_+$. Finalement :

$$\bar{u}_-(z, t) = \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \bar{U}_+ \exp[j(\omega t + kz)] \text{ et } \bar{i}_-(z, t) = \frac{(Z_0 - \bar{Z}_e) \bar{U}_+}{(\bar{Z}_e + Z_0) Z_0} \exp[j(\omega t + kz)].$$

11. On cherche à écrire l'onde totale de tension sous forme d'une somme réelle de u_p et de u_s ; pour cela, on regroupe le terme d'onde retour avec une partie du terme d'onde aller pour faire apparaître une onde stationnaire. En complexes :

$$\begin{aligned} \bar{u}(z, t) &= \bar{u}_+(z, t) + \bar{u}_-(z, t) = \bar{U}_+ \exp[j(\omega t - kz)] + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \bar{U}_+ \exp[j(\omega t + kz)] = \bar{U}_+ \exp(j\omega t) \left[\exp(-jkz) + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \exp(+jkz) \right] \\ &= \bar{U}_+ \exp(j\omega t) \left[\left(1 + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right) \exp(-jkz) + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} [\exp(+jkz) - \exp(-jkz)] \right] = \bar{U}_+ \exp(j\omega t) \left[\frac{2\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \exp(-jkz) + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} 2j \sin(kz) \right]. \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle on obtient finalement : $u(z, t) = U_p \cos(\omega t - kz + \varphi_p) + U_s \cos(\omega t - \varphi_s) \sin(kz - \varphi_s)$ en posant

$$U_p = \left| \bar{U}_+ \frac{2\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \text{ et } U_s = \left| 2\bar{U}_+ \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right|. \text{ Le degré de désaccord (ou taux d'onde stationnaire) est donc : } \rho = \frac{U_s}{U_p} = \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e} \right|.$$

On aura $\rho = 0$, donc uniquement l'onde progressive envoyée vers $\bar{Z}_e$, si $\bar{Z}_e = Z_0$: c'est l'adaptation d'impédance.

⌘ Problème 3 (Mines-Ponts MP 2022)

15. Cette portion est approximativement l'hypoténuse d'un triangle : $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx \right)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}$.

À l'ordre 1 en $\frac{\partial z}{\partial x}$, il reste $ds \approx dx$. $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ soit $\cos \alpha \approx 1$; $\sin \alpha = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds}$ soit $\sin \alpha \approx \frac{\partial z}{\partial x}$, toujours à l'ordre 1.

Théorème de la résultante cinétique pour cette masse $dm = \mu dx$: $\mu dx \vec{a}(x, t) = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$. Or le mouvement ne se fait pratiquement que sur (Oz) , donc $\vec{a}(x, t) \approx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z$. La projection du TRC sur $\vec{e}_x$ donne donc : $0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t)$ soit $\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$,

ainsi T_x ne dépend pas de x . De plus $T_x = T \cos \alpha \approx T$, donc la norme T ne dépend pas de x . Elle ne dépend donc que des conditions aux limites aux extrémités, et celles-ci sont indépendantes du temps, on peut donc considérer que T est une constante.

16. Projection du TRC sur $\vec{e}_z$: $\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_z(x + dx, t) - T_z(x, t) = T [\sin \alpha(x + dx, t) - \sin \alpha(x, t)]$ si $\vec{T}$ est tangente à la corde, ce qui

correspond à l'hypothèse d'une corde sans raideur. Cela équivaut à $\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left[\frac{\partial z}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) \right]$ soit $\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ que

l'on peut écrire $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ (équation de D'Alembert) en posant $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. C'est la célérité de l'onde (ou vitesse de propagation).

17. Montrons que $z(x, t) = f(x - ct)$ est solution, en posant $u = x - ct$: alors $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \times 1 = \frac{df}{du}$ puis $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2}$;

et $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{df}{du} \times \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du}$ puis $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2}$. On obtient donc bien $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. On montre la même chose pour

$z(x, t) = g(x + ct)$ en posant $v = x + ct$. Finalement, l'équation de D'Alembert étant linéaire, la somme $z(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ est également solution. Le premier terme représente une onde progressive de célérité c dans le sens des x croissants, le second une onde progressive de célérité c dans le sens des x décroissants.

18. Le fil étant accroché à deux points fixes à ses extrémités : $z(0, t) = z(\ell, t) = 0$. En 0, cela donne $A + B = 0$, d'où $z(x, t) = B \exp(j\omega t) [\exp(+jkx) - \exp(-jkx)] = 2jB \exp(j\omega t) \sin(kx)$. En ℓ , cela donne $2jB \exp(j\omega t) \sin(k\ell) = 0$ soit $\sin(k\ell) = 0$, donc $k\ell = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Or $\omega = kc$ selon la relation de dispersion (obtenue en injectant la forme de l'onde dans l'équation de

D'Alembert), donc les valeurs permises de ω sont : $\omega_n = n \frac{c\pi}{\ell}$. L'onde s'écrit en réels $z(x, t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$, produit d'une fonction de x et d'une fonction de t : c'est une onde stationnaire, qui ne se propage pas mais possède des nœuds fixes et des ventres.

19. $T = \mu c^2$ et $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{c\pi}{\ell}$ d'où $c = 2f_1 \ell$ donc $T = 4\mu f_1^2 \ell^2$. AN $T = 0,02 \text{ N}$. On a obtenu $T < T_c$: le fil reste dans son régime élastique.