

Concours blanc Épreuve de physique

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

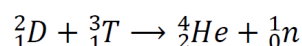
Les calculatrices sont autorisées.

Problème A Des plasmas pour la fusion thermonucléaire

Présentation générale

Pour répondre à la raréfaction des énergies fossiles, il est nécessaire de trouver de nouvelles sources d'énergie décarbonées. Parmi celles-ci, la fusion thermonucléaire est une des pistes à long terme qui donne lieu à une coopération internationale sans précédent avec le projet de recherche ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), dont les installations sont implantées à Cadarache, dans les Bouches-du-Rhône.

La fusion thermonucléaire consiste à faire entrer en collision deux noyaux légers pour obtenir un noyau plus lourd. Cette réaction nucléaire libère de grandes quantités d'énergie du fait qu'une partie de la masse des noyaux est convertie en énergie. Les efforts de recherche portent actuellement sur une réaction nucléaire impliquant deux isotopes de l'hydrogène : le deutérium 2_1D et le tritium 3_1T . La réaction nucléaire produit un noyau d'hélium 4_2He et un neutron selon l'équation de réaction :



Dans un réacteur de fusion, la matière est à l'état de plasma. On appelle plasma un état de la matière constitué d'ions, d'électrons libres et d'espèces neutres. Cet état résulte des très hautes températures atteintes dans le réacteur qui permettent l'ionisation des atomes.

Ce sujet aborde quelques aspects de la physique des plasmas dont la compréhension est essentielle pour la maîtrise de la fusion contrôlée. Dans la **partie I**, on s'intéressera au confinement magnétique du plasma de fusion dans le réacteur par l'étude du mouvement d'une particule chargée de ce plasma dans un champ magnétique. Dans la **partie II**, on complètera cette approche en tenant compte des collisions possibles entre particules du plasma, ce qui se traduit par un phénomène de diffusion. ~~Enfin, dans la partie III, on envisagera quelques manières d'atteindre les températures nécessaires pour initier les réactions de fusion : chauffage ohmique par induction et propagation d'ondes électromagnétiques dans le plasma.~~

Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Certains résultats de la **sous-partie I.1** seront toutefois utiles pour la suite et pourront être admis même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie I - Confinement magnétique du plasma

Les plasmas créés pour réaliser la fusion thermonucléaire ayant des températures extrêmement élevées, ceux-ci ne peuvent être au contact direct de la paroi du réacteur qui fondrait ou serait fortement endommagée. Pour contenir ces plasmas, on doit donc réaliser un confinement immatériel : la méthode la plus étudiée à ce jour est le confinement magnétique. On se propose dans cette partie d'en comprendre le principe par l'étude du mouvement d'une unique particule chargée au sein du plasma : un cation de masse m et de charge électrique $+e$ (le cas d'un électron se traitant de manière similaire). On supposera que seule la force magnétique agit sur le cation et qu'aucune collision n'a lieu avec les autres espèces présentes dans le plasma.

I.1 - Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde d'axe (Oz) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$, constitué de N spires de rayon a , régulièrement réparties sur une longueur $d \gg a$. Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité I constante (**figure 1**).

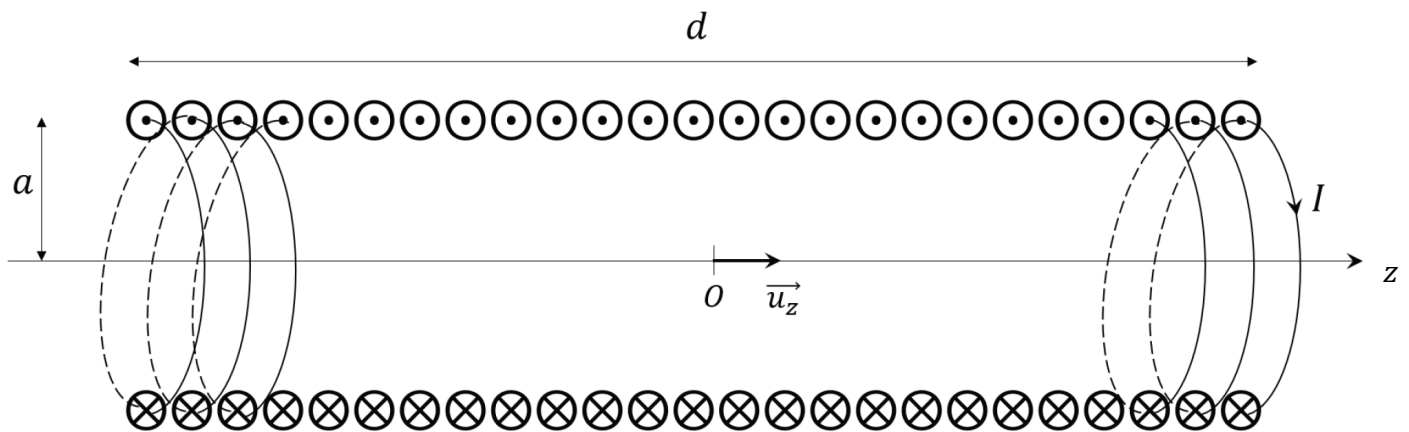


Figure 1 - Schéma du solénoïde. Seules quelques spires sont représentées par souci de lisibilité

Q1. Rappeler sans démonstration l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, en négligeant les effets de bord, sous la forme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ où B_0 est une constante qu'on exprimera, entre autres, en fonction de l'intensité I .

On s'intéresse maintenant au mouvement d'un cation de masse m et de charge électrique $+e$ à l'intérieur de ce solénoïde, soumis au champ $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

Q2. Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve. Par la suite, on notera v_0 la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

On suppose d'abord que le cation a un mouvement dans un plan perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

Q3. Représenter sur un schéma le vecteur vitesse $\vec{v}$ du cation, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la feuille et la force magnétique $\vec{F}_m$. Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires du repère de Frenet.

Q4. Donner l'expression de l'accélération du cation dans le repère de Frenet en fonction de sa vitesse v_0 et du rayon de courbure r de la trajectoire. Montrer que la trajectoire du cation est circulaire, de rayon $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ appelé rayon de Larmor, avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ la pulsation cyclotron.

On suppose maintenant que le cation possède une vitesse initiale v_0 parallèle au champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

- Q5.** En projetant le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{u}_z$, montrer que la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{u}_z$ est constante. En déduire que le mouvement est rectiligne. Peut-on affirmer que le cation est confiné ?

Pour une vitesse initiale quelconque du cation, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique : la trajectoire est alors hélicoïdale.

- Q6.** Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore (**figure 2**), qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales (le rôle du solénoïde central sera étudié dans la **sous-partie III.2**). Quelle raison a conduit à retenir une géométrie toroïdale ?

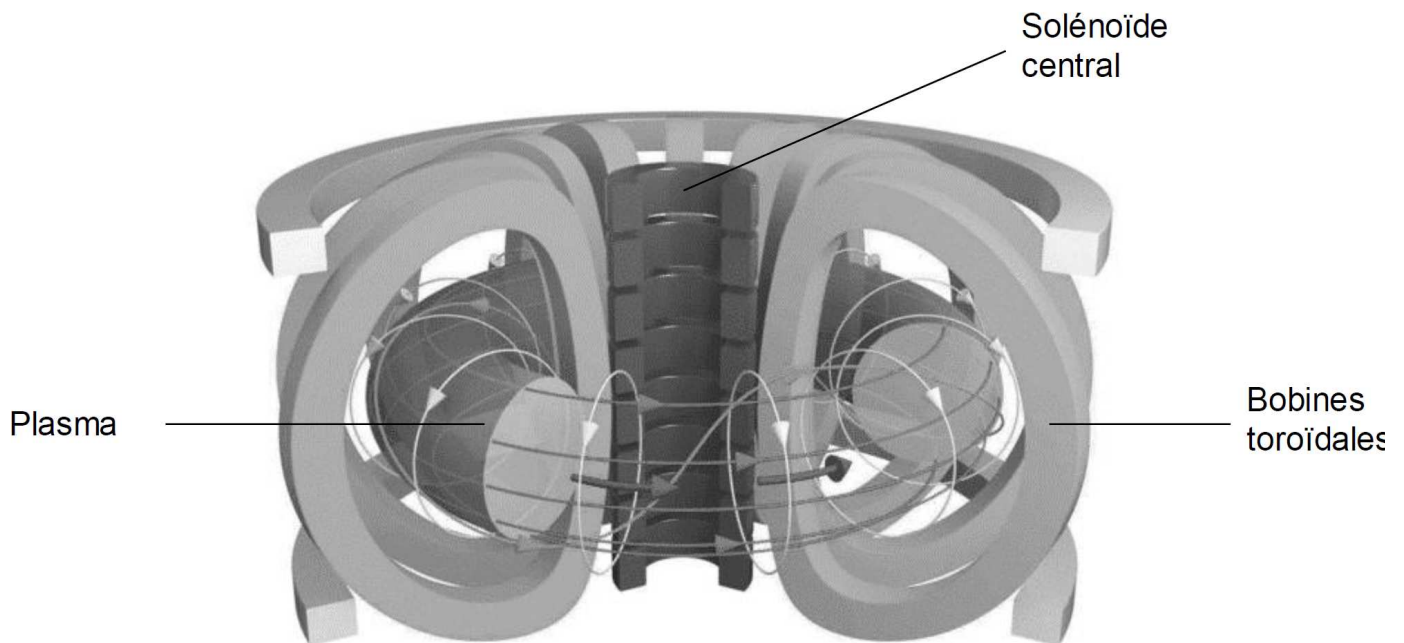


Figure 2 - Schéma d'un tokamak

- Q7.** Calculer le rayon de Larmor d'un cation d'hélium ${}^4_2\text{He}^+$ (masse $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$ kg) de vitesse $v_0 = 3 \cdot 10^5$ m·s⁻¹ dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique $B_0 = 12$ T. Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2 m à l'horizontale et de 3,4 m à la verticale. On donne la charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

I.2 - Bouteille magnétique

Lors des premières recherches sur la fusion contrôlée, il a été envisagé de confiner le plasma à l'aide d'une "bouteille magnétique", qui est un solénoïde dont le rayon des spires diminue lorsqu'on se rapproche de ses bords. L'allure des lignes de champ dans une bouteille magnétique est représentée sur la **figure 3**.

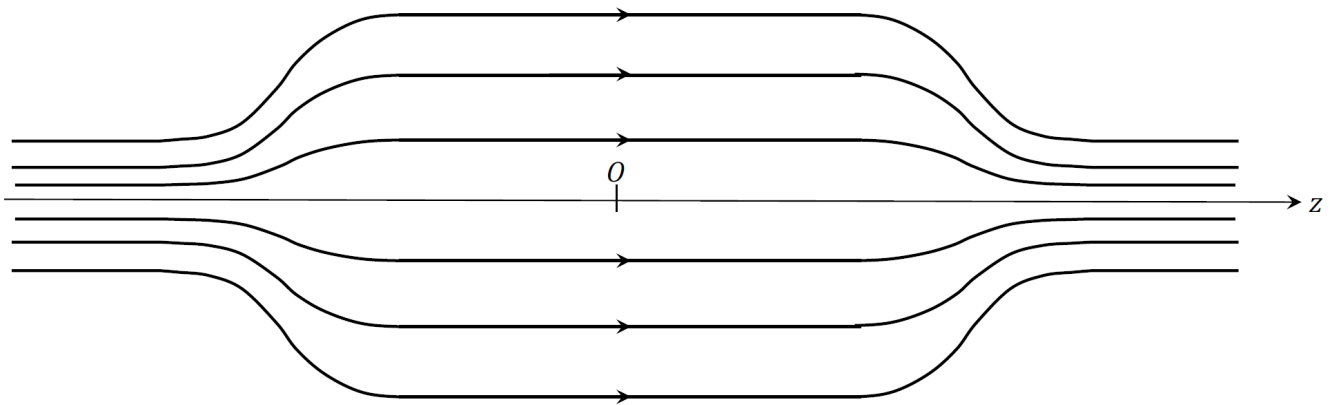


Figure 3 - Lignes de champ d'une bouteille magnétique

Q8. Comment évolue qualitativement l'intensité du champ magnétique lorsqu'on se rapproche des bords de la bouteille magnétique (c'est-à-dire lorsque $|z|$ augmente) ? Représenter graphiquement l'allure de la norme du champ magnétique $B(z)$ sur l'axe (Oz) .

On s'intéresse au mouvement d'un cation de masse m dans cette bouteille magnétique autour de l'axe (Oz) . Son vecteur vitesse est $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$, où $\vec{v}_\perp$ désigne la vitesse dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}_z$, et $\vec{v}_\parallel$ la vitesse selon $\vec{u}_z$.

Q9. Rappeler, schéma à l'appui, la définition du moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une boucle de courant plane.

Q10. Au voisinage de l'axe (Oz) , le champ magnétique est localement uniforme et orienté selon $\vec{u}_z$: $\vec{B} = B \vec{u}_z$. Dans cette question, on suppose comme dans la **Q4** que le mouvement du cation est circulaire, uniforme et de vitesse $v_\perp$, perpendiculairement au champ magnétique. Montrer que le moment magnétique $\vec{\mu}$ associé au cation a pour expression :

$$\vec{\mu} = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \vec{u}_z.$$

L'expression du moment magnétique établie à la **Q10** reste en première approximation valable malgré les déplacements du cation selon l'axe (Oz) . En outre, on peut montrer que ce moment magnétique reste constant au cours du mouvement. Ainsi, le cation peut être assimilé à un dipôle magnétique rigide se déplaçant selon l'axe (Oz) , auquel on associe une énergie potentielle de la forme $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

Q11. Montrer que $E = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + E_p$ est une constante. Quelle signification physique peut-on donner aux termes $\frac{1}{2}mv_\parallel^2$ et E du point de vue du dipôle magnétique ?

Q12. Tracer l'allure de $E_p(z)$. Discuter qualitativement les différents mouvements possibles du cation dans la bouteille magnétique en fonction de la valeur de E (états libres ou états liés). Dans quel cas peut-on dire que la bouteille magnétique se comporte comme un " miroir magnétique ", c'est-à-dire que le cation repart dans la direction opposée sur les bords de la bouteille ?

Q13. Quel défaut présente la bouteille magnétique pour le confinement du plasma ?

Partie II - Diffusion du plasma

L'étude menée dans la **partie I** est insuffisante au sens où elle néglige la possibilité de collisions, ce qui se traduit au niveau macroscopique par un phénomène de diffusion. On se propose dans cette partie d'étudier la diffusion d'un plasma faiblement ionisé, c'est-à-dire un plasma dans lequel les collisions ont lieu presque exclusivement entre des particules chargées et des espèces neutres : il ne s'agit certes pas des conditions réelles d'un plasma de fusion, mais cette étude permet néanmoins de dégager certaines propriétés physiques spécifiques à la diffusion dans les plasmas. Dans les **sous-parties II.1** et **II.2**, on étudiera la diffusion en l'absence de champ magnétique, puis dans la **sous-partie II.3**, on discutera qualitativement l'effet du champ magnétique sur la diffusion.

II.1 - Équation de diffusion ambipolaire

On assimile le plasma à un milieu constitué d'ions de charge $+e$, d'électrons libres de charge $-e$ et d'espèces neutres. Le plasma est contenu entre deux parois conductrices infinies situées aux abscisses $x = 0$ et $x = L$ (**figure 4**). On suppose qu'il y a invariance du milieu selon toute direction parallèle à ces plaques, si bien que les caractéristiques du plasma ne dépendent que de l'abscisse x et du temps t . Pour toutes les grandeurs physiques introduites, l'indice i se rapporte aux ions, l'indice e aux électrons. On note $n_i(x, t)$ et $n_e(x, t)$ les densités volumiques d'ions et d'électrons (exprimées en m^{-3}), $\vec{j}_i = j_i(x, t) \vec{u}_x$ et $\vec{j}_e = j_e(x, t) \vec{u}_x$ les vecteurs densité de flux d'ions et d'électrons (exprimés en $\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$). On néglige la possibilité de recombinaison entre les ions et les électrons au sein du plasma.

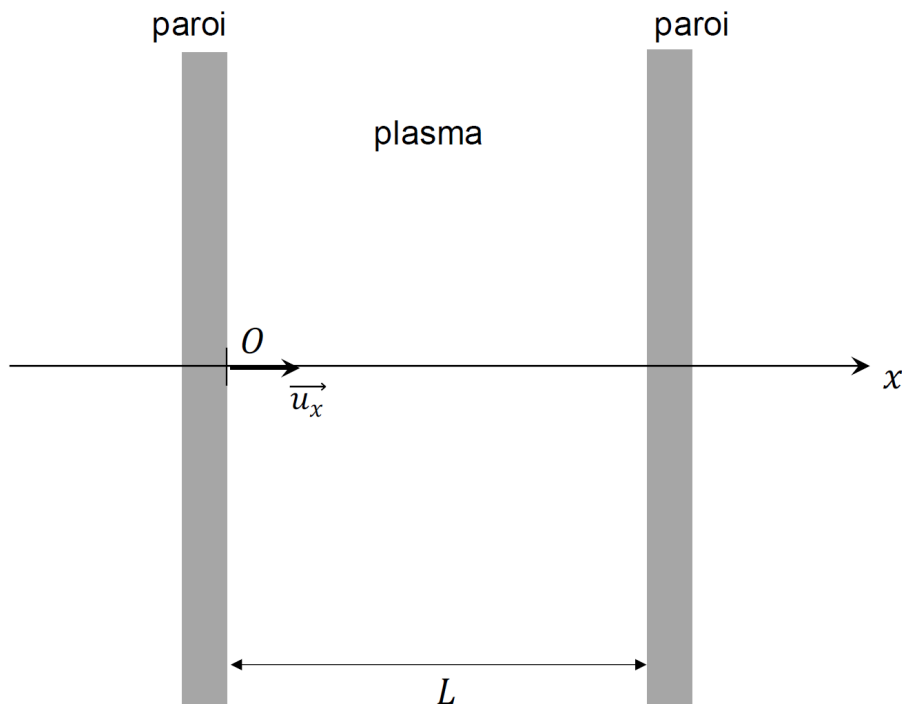


Figure 4 - Géométrie de l'enceinte contenant le plasma

Q14. Établir l'équation locale de conservation des électrons :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial j_e}{\partial x} = 0.$$

Donner par analogie l'équation locale de conservation des ions.

Q15. Les parois étant conductrices, les électrons libres et les ions arrivant sur les parois se recombinaient entre eux de façon quasi-instantanée, si bien que $n_i = n_e = 0$ sur les parois. En effectuant un bilan de charge électrique sur la paroi située en $x = L$, établir la relation $j_i(x = L, t) = j_e(x = L, t)$.

On suppose la quasi-neutralité du plasma, c'est-à-dire que $n_i(x, t) = n_e(x, t) = n(x, t)$ dans le plasma.

Q16. À l'aide des résultats des deux questions précédentes, montrer que $j_i(x, t) = j_e(x, t)$.

Du fait de la présence des charges, un champ électrique $\vec{E} = E(x, t) \vec{u}_x$ existe dans le plasma. Les vecteurs densité de flux obéissent alors à des relations de la forme :

$$\begin{cases} \vec{j}_i = n\mu_i\vec{E} - D_i \overrightarrow{\text{grad}} n \\ \vec{j}_e = -n\mu_e\vec{E} - D_e \overrightarrow{\text{grad}} n \end{cases}$$

avec μ_i et μ_e les mobilités, et D_i et D_e les coefficients de diffusion des ions et des électrons.

Q17. Comment s'appelle la loi associée au terme $-D \overrightarrow{\text{grad}} n$ apparaissant dans ces deux expressions ? Que traduit physiquement le terme $\pm n\mu\vec{E}$?

Q18. Après avoir exprimé $E(x, t)$ en fonction de $\frac{\partial n}{\partial x}$, montrer que $j = j_i = j_e = -D_a \frac{\partial n}{\partial x}$ avec D_a le coefficient de diffusion ambipolaire, qu'on exprimera en fonction de μ_i , μ_e , D_i et de D_e .

Q19. En déduire l'équation de diffusion ambipolaire :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

II.2 - Résolution de l'équation de diffusion ambipolaire

On souhaite résoudre l'équation de diffusion ambipolaire établie à la **Q19**. Pour cela, on recherche des solutions sous la forme $n(x, t) = F(t)G(x)$, où F et G sont deux fonctions à déterminer.

Q20. Montrer que l'équation de diffusion ambipolaire se ramène au système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{\tau} = 0 \\ \frac{d^2G}{dx^2} + \frac{G}{D_a\tau} = 0 \end{cases}$$

avec τ une constante homogène à un temps, qui sera introduite au cours du calcul et qu'on supposera positive dans les questions suivantes.

Q21. En déduire $n(x, t)$ en fonction de τ , D_a et de deux constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade.

Q22. On rappelle que sur les parois, $n = 0$ à tout instant. En utilisant ces conditions aux limites, montrer qu'il existe des modes de diffusion $n_p(x, t)$ indicés par un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que le temps τ caractéristique du mode p a pour expression :

$$\tau_p = \frac{1}{D_a} \left(\frac{L}{p\pi} \right)^2.$$

Par application du théorème de superposition des solutions, on écrit la solution complète de l'équation de diffusion sous la forme :

$$n(x, t) = \sum_p n_p(x, t).$$

Q23. Si tous les modes de diffusion sont *a priori* présents à l'instant initial, seul le mode $p = 1$ perdure de façon visible. Expliquer pourquoi. Donner l'expression de $n_1(x, t)$ en fonction de D_a , L et d'une constante multiplicative, puis tracer $n_1(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$ pour deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. Expliquer qualitativement pourquoi la densité de charge du plasma diminue au cours du temps.

II.3 - Diffusion en présence de champ magnétique

De façon générale, le phénomène de diffusion peut être interprété au niveau microscopique par un modèle de " marche au hasard ". Une entité diffusante subit des collisions avec les autres entités du milieu et repart dans une direction aléatoire après chaque collision (**figure 5**).

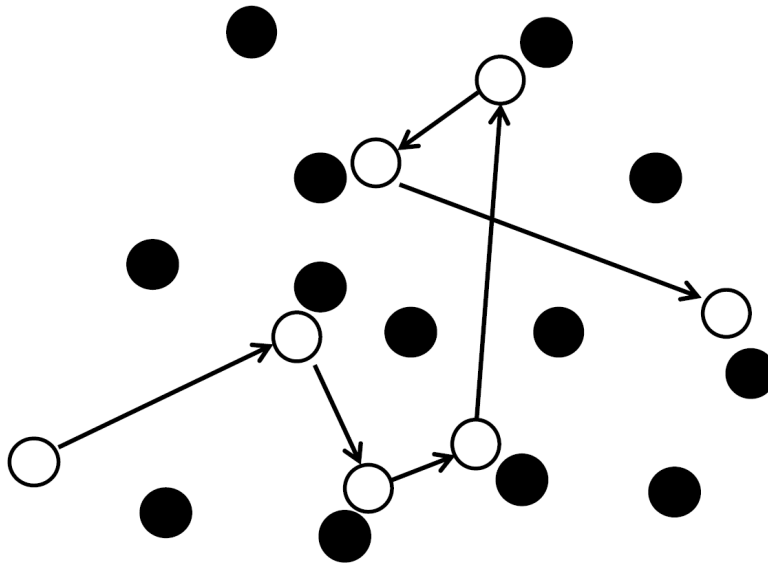


Figure 5 - Marche au hasard : la boule blanche représente l'entité diffusante, les boules noires les autres entités du milieu avec lesquelles elle est susceptible de rentrer en collision

Q24. On suppose que le coefficient de diffusion D peut s'exprimer en fonction de la vitesse quadratique moyenne v^* de l'espèce diffusante et de la durée moyenne τ^* entre deux collisions. Par analyse dimensionnelle, exprimer D en fonction de v^* et de τ^* , à un facteur sans dimension près, qui sera pris égal à 1. Donner une explication physique de la dépendance de D avec τ^* .

Lorsque dans un plasma, on ajoute un champ magnétique stationnaire et uniforme, la diffusion devient anisotrope. Les coefficients de diffusion des ions et des électrons parallèlement au champ magnétique sont les mêmes qu'en l'absence de champ magnétique. En revanche, perpendiculairement au champ magnétique, le coefficient de diffusion D'_i des ions peut s'exprimer en fonction du coefficient de diffusion D_i en l'absence de champ magnétique :

$$D'_i = \frac{D_i}{1 + (\omega_c \tau^*)^2}$$

où ω_c désigne la pulsation cyclotron de l'ion introduite dans la **Q4**, et τ^* la durée moyenne entre deux collisions avec une espèce neutre. Une relation analogue peut être établie pour les électrons.

On dit que le plasma est magnétisé si la présence du champ magnétique diminue notablement la diffusion perpendiculaire au champ magnétique et qu'il est non magnétisé si son influence est négligeable sur cette diffusion.

Q25. À quelle condition sur le terme $\omega_c \tau^*$ peut-on affirmer que le plasma est magnétisé ? À quelle condition est-il non magnétisé ?

Q26. Montrer que pour un plasma non magnétisé, D'_i est proportionnel à τ^* , tandis que pour un plasma magnétisé, D'_i est proportionnel à l'inverse de τ^* . Vérifier qu'un plasma magnétisé l'est d'autant plus que le champ magnétique est intense.

Pour interpréter qualitativement la dépendance inhabituelle du coefficient de diffusion avec τ^* apparaissant dans un plasma magnétisé, on a représenté sur la **figure 6** la trajectoire d'une charge dans un plasma pour deux valeurs de $\omega_c \tau^*$.

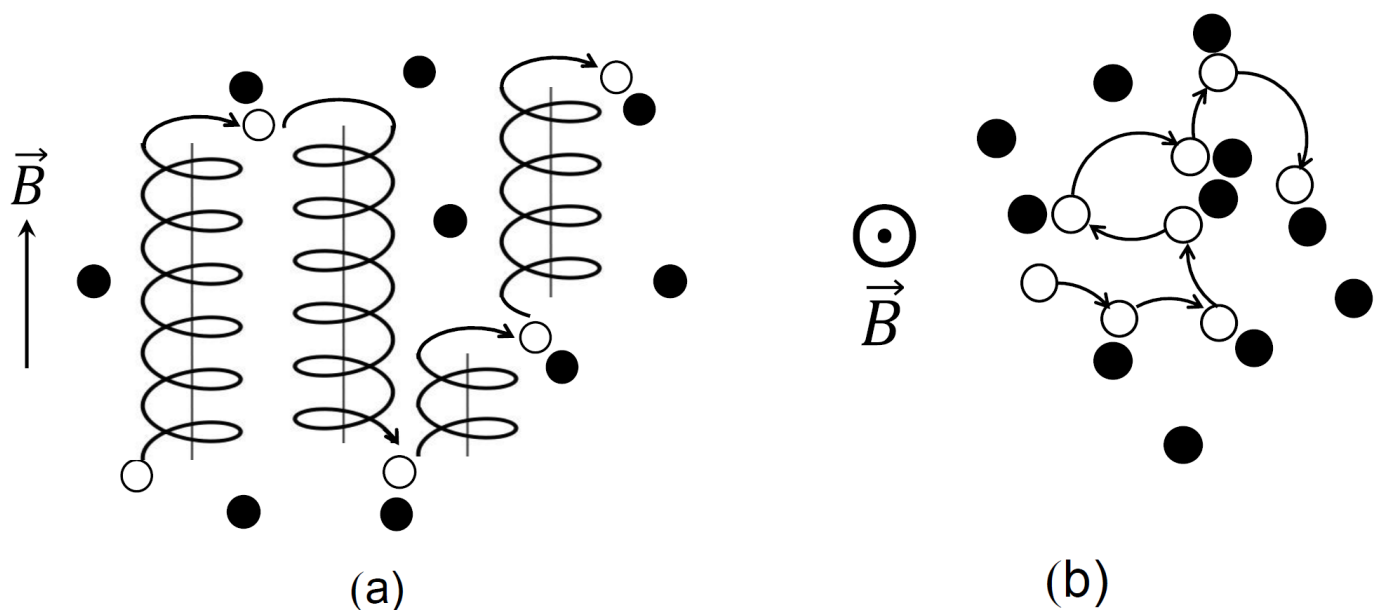


Figure 6 - Trajectoires d'une charge électrique pour deux valeurs de $\omega_c \tau^*$. La boule blanche représente la particule chargée et ses collisions avec les espèces neutres (boules noires)

Q27. Identifier, en justifiant votre réponse, quelle figure correspond à un plasma magnétisé.

Q28. Expliquer qualitativement, en vous appuyant sur la **figure 6**, pourquoi D'_i est d'autant plus faible que τ^* est élevé dans un plasma magnétisé.

Q29. Justifier brièvement l'intérêt d'un fort champ magnétique pour confiner un plasma de fusion tel que celui présent dans un tokamak (**figure 2**). On admettra que les conclusions qualitatives concernant l'influence du champ magnétique restent valables pour un plasma de fusion.

Problème B

Mesures de la vitesse d'un fluide

Présentation générale

Mesurer la vitesse d'un fluide est nécessaire dans nombre de contextes : météorologie (relevé de la vitesse du vent), énergie (détermination d'un potentiel d'exploitation éolien), aéronautique (test de nouveaux avions en soufflerie), confort thermique (réglage d'un système de ventilation) ...

Données numériques

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Masse volumique de l'air à température et pression ambiantes : $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Viscosité dynamique de l'air à 300 K : $\eta_{\text{air}} = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Partie I - Anémomètres mécaniques

On appelle anémomètre un instrument de mesure de la vitesse du vent.

I.1 - Anémomètre à plaque

Le premier anémomètre dont l'histoire des sciences a gardé une trace a été conçu dans les années 1450 par l'architecte italien Leon Battista Alberti. Il repose sur la déviation d'une plaque attachée au bout d'une tige pouvant pivoter autour d'un axe horizontal. Le vent arrivant sur la plaque soulève cette dernière. L'inclinaison de la plaque permet de déduire la vitesse du vent.

Le schéma d'un anémomètre à plaque est représenté sur la **figure 1**. La plaque circulaire homogène, de masse $m = 30 \text{ g}$ et de rayon $R = 5 \text{ cm}$ est attachée en son centre à une tige de longueur $L = 15 \text{ cm}$ et de masse négligeable. Le système {plaque + tige} peut tourner sans frottements autour d'un axe horizontal (Δ) orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$. Le vent arrive horizontalement, perpendiculairement à l'axe (Δ), avec une vitesse U supposée constante, de l'ordre de quelques $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On note J_Δ le moment d'inertie du système {plaque + tige} par rapport à l'axe (Δ), et θ l'angle de la tige par rapport à la verticale.

On considère que pour des angles d'inclinaison faibles, la résultante des forces aérodynamiques s'exerçant sur la plaque en raison du vent est de la forme $\vec{F} = \mu U \vec{U}$ avec $\mu = 1 \cdot 10^{-2}$ dans les unités du Système International (SI).

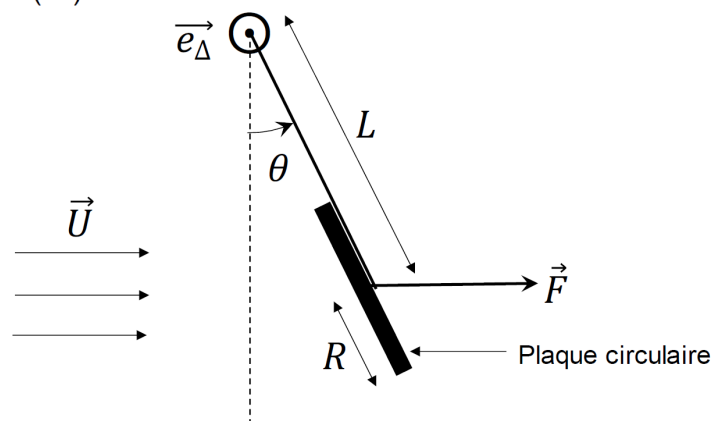


Figure 1 - Anémomètre à plaque

- Q1.** Déterminer l'unité SI de μ en utilisant les unités des grandeurs de base.
- Q2.** Justifier le choix d'une force aérodynamique proportionnelle à U^2 dans cette situation.
- Q3.** On suppose que le point d'application de la résultante des forces aérodynamiques se situe au centre de la plaque circulaire. Exprimer les moments scalaires par rapport à l'axe (Δ) des forces s'exerçant sur le système {plaque + tige}.

Q4. Lorsque le système est à l'équilibre mécanique, on mesure l'angle $\theta_{eq} = 8^\circ$ à l'aide d'un rapporteur. Déterminer l'expression de la vitesse U du vent, en fonction de μ , m , g et θ_{eq} . Faire l'application numérique. La valeur obtenue vous paraît-elle cohérente ?

I.2 - Anémomètre à coupelles

Document 1 - Description de l'anémomètre à coupelles

L'anémomètre à coupelles, inventé en 1846 par John Thomas Romney Robinson, est composé de trois ou quatre coupelles creuses de forme hémisphérique ou conique, reliées à un axe de rotation vertical. En régime permanent, l'anémomètre tourne à une fréquence f (nombre de tours par seconde) dépendant de la vitesse horizontale U du vent loin de l'anémomètre selon la relation :

$$U = \ell_0 f + U_0$$

avec ℓ_0 la distance d'étalonnage et U_0 la vitesse de démarrage. Ces deux constantes dépendent des caractéristiques de chaque anémomètre et sont déterminées par le constructeur préalablement à la mise en place de l'anémomètre sur site.

L'anémomètre à coupelles est aujourd'hui l'instrument de référence pour mesurer la vitesse du vent dans le domaine de la météorologie.



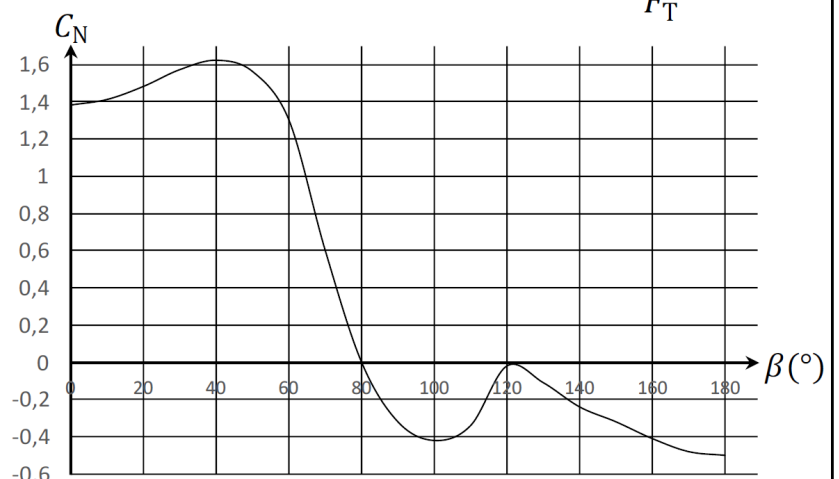
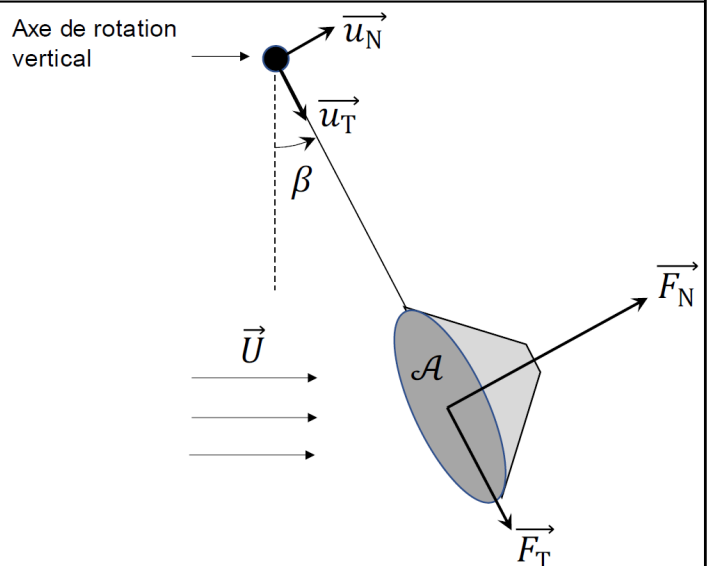
Document 2 - Force aérodynamique sur une coupelle conique immobile

Pour étudier l'effet du vent sur une coupelle conique, on effectue des tests en soufflerie. La coupelle étant maintenue immobile, on relève la force aérodynamique s'exerçant sur la coupelle. On fait pivoter la coupelle dans un plan horizontal pour tester différents angles d'incidence β par rapport au vent de vitesse $U = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La force aérodynamique s'exerçant au centre de la coupelle se décompose en une force $\vec{F}_N$ normale à la surface $\mathcal{A} = 1 \text{ dm}^2$ de la base du cône, et une force $\vec{F}_T$ tangentielle à cette même surface. Ces forces ont pour expression :

$$\begin{cases} \vec{F}_N = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \mathcal{A} C_N U^2 \vec{u}_N, \\ \vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \mathcal{A} C_T U^2 \vec{u}_T, \end{cases}$$

avec C_N et C_T des coefficients sans dimension.

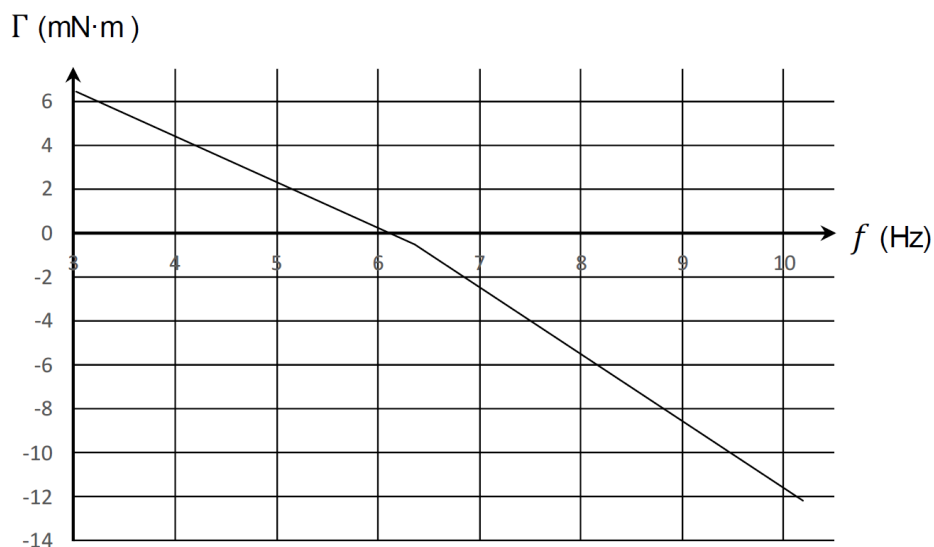
Par symétrie et en supposant que le bras de l'anémomètre a une influence négligeable sur l'écoulement : $\|\vec{F}_N(-\beta)\| = \|\vec{F}_N(\beta)\|$.



Source : M.J. Brevoort, U.T. Joyner, " Aerodynamic characteristics of anemometer cups ",

Document 3 - Couple s'exerçant sur l'anémomètre à coupelles

Le couple aérodynamique Γ (moyenné sur un tour complet) qu'exerce le vent sur un anémomètre à coupelles peut être mesuré en régime permanent en fonction de la fréquence f de rotation de l'anémomètre, pour un vent de vitesse $U = 8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Source : Norme IEC 61400-12-1-Annexe J (2005)

- Q5.** On représente sur la **figure 2** un anémomètre composé de 4 coupelles coniques décalées de 90° les unes par rapport aux autres et soumises à un vent de vitesse $\vec{U}$. Reproduire ce schéma sur votre copie. En supposant que l'anémomètre est initialement immobile, représenter, en vous aidant du **document 2**, les forces $\vec{F}_N$ s'exerçant sur chaque coupelle. On comparera les normes de ces forces les unes par rapport aux autres.

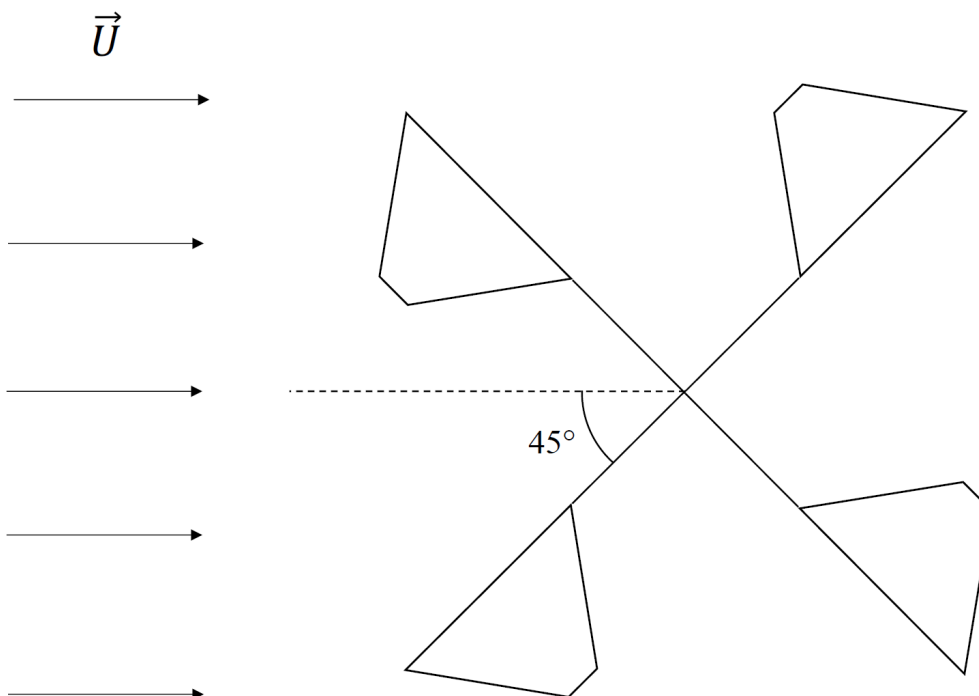


Figure 2 - Position initiale de l'anémomètre soumis au vent

- Q6.** Expliquer à partir de votre schéma pourquoi l'anémomètre va se mettre en mouvement, et représenter le sens de rotation sur le schéma.
- Q7.** Justifier que la force tangentielle $\vec{F}_T$ est sans importance pour l'étude du mouvement de rotation de l'anémomètre.

Q8. Rappeler la définition d'un couple de forces. Le terme de "couple" aérodynamique utilisé dans le **document 3** vous paraît-il bien choisi ?

(**Q9** supprimée)

Q10. Lorsque la vitesse U du vent est inférieure à la vitesse de démarrage U_0 (**document 1**), l'anémomètre est immobile. Quel phénomène peut expliquer l'existence de cette vitesse de démarrage ?

Q11. En négligeant la vitesse de démarrage U_0 , estimer la distance d'étalonnage ℓ_0 de l'anémomètre étudié dans le **document 3**.

(**Q12** supprimée)

Partie II - Anémomètre à fil chaud

Lorsqu'on veut mesurer la vitesse de l'air à l'intérieur des habitations, par exemple pour contrôler le bon fonctionnement d'un système de ventilation, on utilise préférentiellement un anémomètre à fil chaud. Son principe est le suivant : un fil électrique parcouru par un courant s'échauffe par effet Joule, tandis qu'il est refroidi par l'air circulant autour du fil. Plus l'air a une vitesse élevée, plus l'effet de refroidissement est important.

II.1 - Principe de la mesure

L'anémomètre à fil chaud est représenté sur la **figure 3**. Un fil électrique, de diamètre $d = 1 \mu\text{m}$ et de longueur $\ell = 1 \text{ mm}$, est parcouru par un courant continu d'intensité I . Sa résistance R_f dépend de la température T_f du fil, supposée uniforme dans tout le fil : $R_f = R(T_f) = R_0(1 + \gamma(T_f - T_0))$, où T_0 est la température de l'air loin du fil, R_0 la résistance du fil à T_0 , et $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ une constante caractéristique du matériau dont est constitué le fil.

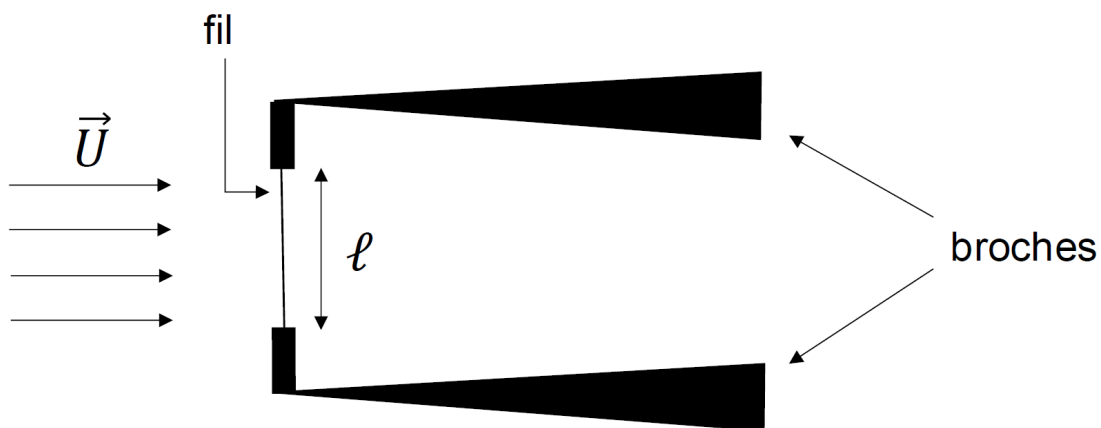


Figure 3 - Anémomètre à fil chaud

L'air s'écoule à la vitesse U perpendiculairement au fil. Sur l'ensemble des modes de transfert thermique possibles entre le fil et son environnement, c'est la convection forcée par l'écoulement de l'air qui est le mode prédominant. Ainsi, le transfert thermique cédé par le fil à son environnement pendant la durée dt est donné par la loi de Newton :

$$\delta Q_{\text{cédé}} = h(T_f - T_0)S_{\text{lat}} dt$$

avec S_{lat} la surface latérale du fil en contact avec l'air et h le coefficient de transfert thermique de surface. On traduit l'efficacité de la convection forcée avec la vitesse U de l'écoulement par la relation :

$$h = a_0 + b_0\sqrt{U}$$

où a_0 et b_0 sont deux constantes.

Q13. Le fil est en platine, de résistivité $\rho_{Pt} = 1,11 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$ à $T_0 = 300 \text{ K}$. Calculer R_0 .

Q14. On se place en régime permanent : le fil est à la température T_f constante. En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur le fil, établir la loi de King :

$$\frac{R_f I^2}{R_f - R_0} = K(a_0 + b_0 \sqrt{U})$$

dans laquelle K est à exprimer en fonction de γ , ℓ , d et R_0 .

Q15. L'anémomètre à fil chaud est utilisé en maintenant la température T_f constante. Pour permettre cela, un système de rétroaction adapte l'intensité dans le fil en fonction des variations de vitesse de l'écoulement. Comment doit varier l'intensité lorsque la vitesse de l'écoulement augmente ? Justifier brièvement.

Q16. On mesure la tension E_f aux bornes du fil (en convention récepteur). Établir la relation entre E_f et U , en fonction de R_f , R_0 , K , a_0 et b_0 .

(Q17 à Q27 supprimées)

Partie III - Vélocimétrie laser à franges

Les anémomètres étudiés dans les deux premières parties nécessitent de placer l'appareil de mesure au sein de l'écoulement, ce qui est susceptible de perturber ce dernier. En outre, la résolution spatiale est limitée par la taille de l'anémomètre. Ces inconvénients ont conduit à développer des méthodes optiques pour mesurer la vitesse locale d'un fluide : ces méthodes ne nécessitent pas d'introduire de capteur susceptible de perturber l'écoulement et présentent de meilleures résolutions spatiales. Elles sont donc actuellement utilisées dans le domaine de la recherche, par exemple pour étudier les phénomènes de turbulence.

On s'intéresse dans cette dernière partie à une de ces méthodes : la vélocimétrie laser à franges. Le principe consiste à croiser deux faisceaux issus d'une même source laser dans une zone de l'écoulement afin de créer des franges d'interférences lumineuses (**figure 8**). On introduit dans le fluide des particules d'ensemencement (gouttelettes d'huile, microbilles d'aluminium ou de polystyrène...) qui suivent l'écoulement du fluide. Lorsqu'une de ces particules traverse les franges d'interférences, elle diffuse la lumière du laser. L'intensité diffusée est proportionnelle à l'intensité lumineuse du laser. Ainsi, en mesurant l'intensité de la lumière diffusée par la particule au cours du temps, on peut accéder à la vitesse à laquelle celle-ci traverse les franges, ce qui permet de déduire la vitesse du fluide.

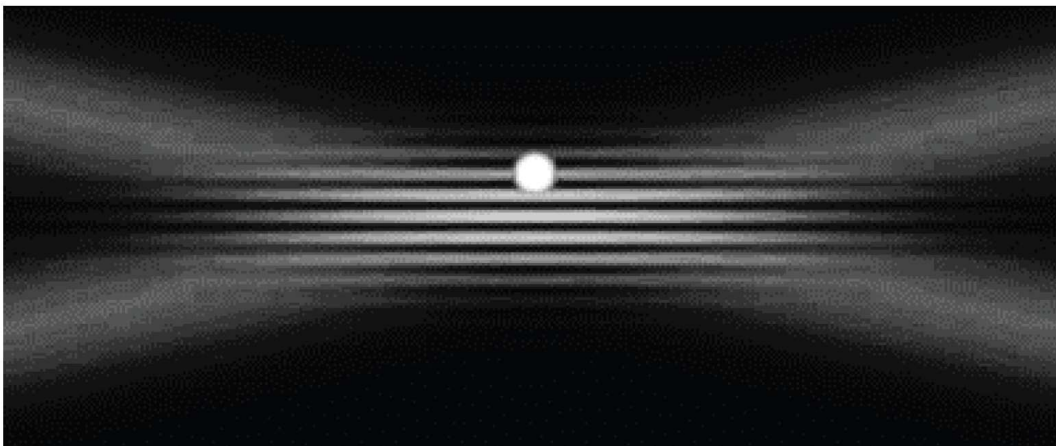


Figure 8 - Franges d'interférences créées par les faisceaux laser. Une particule suivant le mouvement du fluide passe à travers les franges (source : ONERA)

III.1 - Production de la figure d'interférences et résolution spatiale

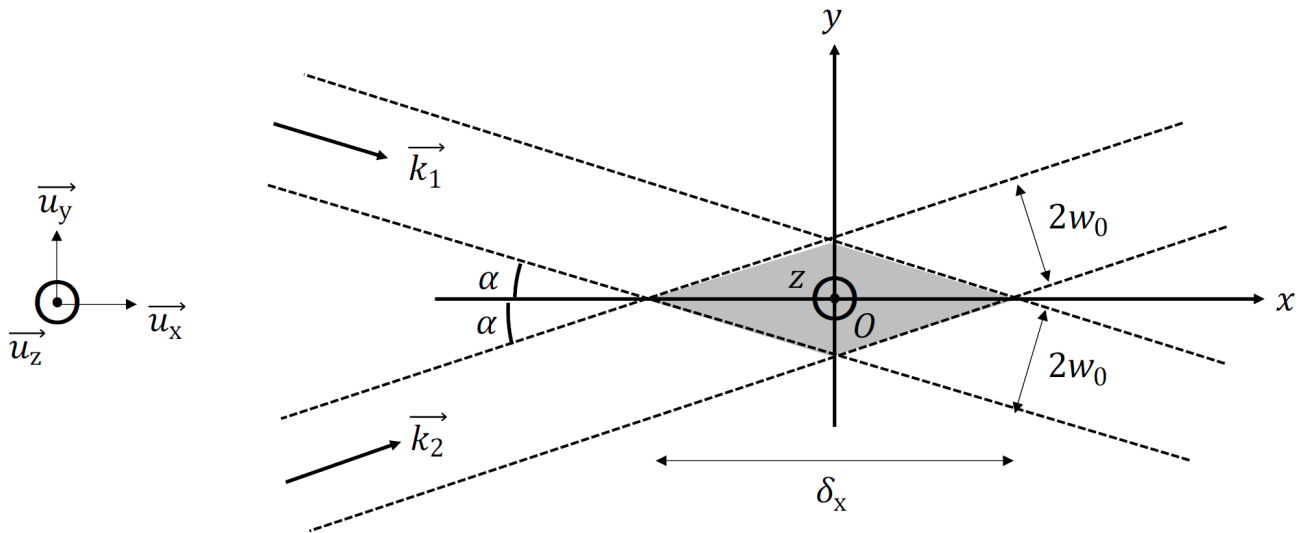


Figure 9 - Croisement des faisceaux laser : la zone d'interférences est représentée en gris

La configuration d'étude de la vélocimétrie laser à franges est représentée à la **figure 9**. Les deux faisceaux laser issus d'une même source de fréquence f_L et de pulsation $\omega_L = 2\pi f_L$ se croisent dans un écoulement d'air dont on veut mesurer la vitesse. Le centre O de la figure d'interférences est l'origine d'un repère $(Oxyz)$, tel que les directions des deux faisceaux sont inclinées d'un angle $\alpha = 6,0^\circ$ par rapport à l'axe (Ox) . La longueur d'onde du laser dans l'air est assimilable à celle dans le vide $\lambda_0 = 514,5 \text{ nm}$, les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ des deux faisceaux ont des normes égales, telles que $\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\| = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Les champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ associés aux deux faisceaux, de même amplitude E_0 , ont pour expression, en un point quelconque $M(x, y)$ appartenant à l'un ou l'autre des faisceaux :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(M, t) = E_0 \cos(\omega_L t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}) \vec{u}_z \\ \vec{E}_2(M, t) = E_0 \cos(\omega_L t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}) \vec{u}_z. \end{cases}$$

- Q28.** Les ondes laser sont-elles longitudinales ou transversales ? Quel est l'état de polarisation de ces ondes ? Justifier brièvement.
- Q29.** L'éclairement $\mathcal{E}$ est défini comme la moyenne temporelle du carré du champ électrique. Montrer que dans la zone d'interférences :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM} \right) \right)$$

avec $\mathcal{E}_0 = \frac{E_0^2}{2}$.

- Q30.** Montrer que les franges brillantes sont des droites d'équations $y_p = \frac{p\lambda_0}{2 \sin \alpha}$, avec p un entier relatif. Déterminer l'expression de l'interfrange Δy et faire l'application numérique.
- Q31.** On suppose qu'une particule en mouvement avec le fluide passe à travers la zone d'interférences avec une vitesse v_y selon $\vec{u}_y$. On mesure l'intensité lumineuse diffusée par la particule au cours du temps et on obtient un signal de fréquence $f_d = 2,45 \text{ MHz}$. Déterminer la valeur numérique de v_y .

Formulaire

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$