

On3 – Corrigé des exercices 1 (fin), 2, 3 et 4

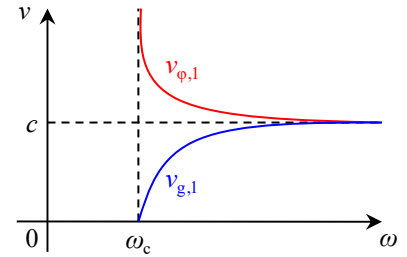
□ Exercice 1 (fin)

d) On a trouvé : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$. Donc $k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$.

e) Pour qu'il y ait propagation, k doit être réel : au minimum $\frac{\omega^2}{c^2} > \frac{\pi^2}{a^2}$ soit $\omega > \frac{\pi c}{a} = \omega_c$ et $f > \frac{c}{2a} = f_c$. AN $f_c = 15 \text{ GHz}$: c'est le domaine des ondes hertziennes, et plus précisément des micro-ondes.

f) Vitesse de phase : $v_{\phi,n} = \frac{\omega}{k_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}}$ soit $v_{\phi,n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}}$.

Vitesse de groupe : $v_{g,n} = \frac{d\omega}{dk_n} = \left(\frac{dk_n}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{\frac{2\omega}{c^2}}{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}} \right)^{-1}$ soit $v_{g,n} = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}$.



On trouve bien $v_{g,n} v_{\phi,n} = c^2$ (relation liée à ce type de relation de dispersion), avec $v_{g,n} < c$ (vitesse de l'énergie) et $v_{\phi,n} > c$.

g) $\vec{H}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \wedge \left[-\frac{n\pi}{a\omega} E_m \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \vec{e}_x - \frac{k}{\omega} E_m \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \right]$

soit $\vec{H}(M,t) = \frac{1}{\mu_0} E_m^2 \left[-\frac{n\pi}{a\omega} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y + \frac{k}{\omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x \right]$.

Moyenne temporelle : $\langle \vec{H}(M) \rangle = \frac{E_m^2 k}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \vec{e}_x$. Ce vecteur est bien selon la direction de propagation de l'onde. Il est maximum au milieu du guide d'onde, puisque c'est là que l'amplitude de l'onde (composante transverse) est maximale.

□ Exercice 2

a) Loi des mailles : $u(x+dx,t) + \lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + \rho dx i(x,t) - u(x,t) = 0$ d'où $\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial i}{\partial t} + \rho i = 0$ (1).

Loi des nœuds : $i(x,t) - i(x+dx,t) - \gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = 0$ d'où $\frac{\partial i}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (2). (À l'ordre 1, $\gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} \approx \gamma dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$.)

b) On dérive (1) par rapport à x et (2) par rapport à t : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + \rho \frac{\partial i}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Or $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ donc la première équation devient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial i}{\partial x} = 0$. Il reste à éliminer $\frac{\partial i}{\partial x}$, en utilisant à nouveau l'équation (2) : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Les deux premiers termes sont ceux de l'équation de D'Alembert, avec $c = 1/\sqrt{\lambda\gamma}$.

c) On injecte la forme proposée dans l'équation d'onde : $-k^2 A \exp j(\omega t - kx) + \lambda \gamma \omega^2 A \exp j(\omega t - kx) - \rho \gamma j \omega A \exp j(\omega t - kx) = 0$ d'où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \rho \gamma j \omega$. Il reste à trouver les racines carrées de ce nombre complexe, ce qui mène à des calculs assez lourds en

l'absence d'approximation. Pour savoir si une approximation est faisable, comparons les ordres de grandeur des deux termes pour une fréquence typique de signal, par exemple quelques mégahertz, soit $\omega \approx 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$:

$\frac{\omega^2}{c^2} \approx 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ et $\rho \gamma \omega \approx 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ donc $\rho \gamma \omega \ll \frac{\omega^2}{c^2}$ (et cela reste valable pour des fréquences 10 ou 100 fois plus faibles).

On peut alors faire un DL à l'ordre 1 : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \rho \gamma j \omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{\rho \gamma c^2}{\omega} \right) \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{\rho \gamma c^2}{2\omega} \right)^2$ d'où $k \approx \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - j \frac{\rho \gamma c^2}{2\omega} \right) = \pm (k' - jk'')$

avec $k' = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\lambda\gamma}$ et $k'' = \frac{\rho \gamma c}{2} = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$. Pour la suite on garde le signe + (sens des x croissants).

Finalement : $u(x,t) = A \exp j(\omega t - (k' - jk'')x) = A \exp(-k''x) \exp j(\omega t - k'x)$ et en revenant aux notations réelles (avec $A = A_m \exp(j\varphi)$) : $u(x,t) = A_m \exp(-k''x) \cos(\omega t - k'x + \varphi)$.

La vitesse de phase (ou célérité) est $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = c$: elle est indépendante de ω , il n'y a pas de dispersion.

L'amplitude décroît exponentiellement le long de la direction de propagation : il y a absorption (due à l'effet Joule dans la résistance).

d) AN $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Son indice est défini par : $n = \frac{c_{\text{vide}}}{c}$. AN $n = 1,2$.

e) Sur une longueur $L = 100 \text{ m} = 1 \text{ hm}$, l'onde est multipliée par $\exp(-k''L)$, c'est-à-dire atténuée d'un facteur $\alpha = \exp(k''L)$.

L'atténuation en dB/hm est donc : $K = 20 \log \alpha = 20 \frac{\ln \alpha}{\ln 10} = 20 \frac{k''L}{\ln 10}$ soit $K = \frac{10L\rho}{\ln 10} \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$. AN $K = 0,0040 \text{ dB/hm}$.

□ Exercice 3

a) Avec les hypothèses et approximations habituelles, le PFD pour un tronçon dx de corde donne, en projection sur $\vec{e}_y$:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right) - h \frac{\partial y}{\partial t} dx \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{h}{\mu} \frac{\partial y}{\partial t}}.$$

b) On injecte dans l'équation et on simplifie : $-\omega^2 = -\frac{T}{\mu} k^2 - \frac{h}{\mu} j\omega$ d'où $k^2 = \frac{\mu}{T} \omega^2 - \frac{h}{T} j\omega = \frac{\mu}{T} \omega^2 \left(1 - \frac{jh}{\mu\omega} \right)$. k^2 est complexe (non

réel) donc k également. Pour $h \ll \mu\omega$: $k = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T} \left(1 - \frac{jh}{2\mu\omega} \right)} = k' - jk''$ avec $\boxed{k' = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T}} \left(= \frac{\omega}{c} \text{ habituel} \right)}$ et $\boxed{k'' = \frac{h}{2\sqrt{T\mu}}}$.

c) Alors $y(x,t) = \underline{A} \exp j(\omega t - k'x + jk''x)$ soit $\boxed{y(x,t) = \underline{A} \exp(-k''x) \exp j(\omega t - k'x)}$, d'où $\boxed{y(x,t) = \underline{A} \exp(-k''x) \cos(\omega t - k'x + \varphi)}$.

La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, indépendante de la fréquence : il n'y a pas de dispersion.

Le facteur $\exp(-k''x)$ traduit une atténuation de l'onde : il y a donc absorption de l'énergie de l'onde par le milieu au cours de la propagation (puisque la corde transfère son énergie à l'air environnant).

□ Exercice 4

a) Pour un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v_x(x,t) \vec{e}_x$, on trouve $\Delta \vec{v} = \text{grad}(\text{div} \vec{v}) = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \vec{e}_x$. L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

donc : $\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$. Avec les deux équations habituelles $\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}$ et $\mu = \chi_s \rho_0 p$, et avec la méthode

habituelle, on obtient finalement : $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} = 0}$ en posant toujours $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$.

b) On injecte la forme cherchée dans l'équation et on simplifie : $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega k^2 \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) = 0$ que l'on peut écrire

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2 \left[1 + j\omega \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \right]}}. \text{ Le carré de } k \text{ est complexe (non réel) donc } k \text{ également.}$$

c) On calcule $\chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) = \frac{1}{\rho_0 c^2} \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$, donc pour les fréquences audibles ($f < 20 \text{ kHz}$ soit $\omega < 1,3 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$\omega \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) < 3 \cdot 10^{-5} \ll 1$. On peut alors faire deux développements limités d'ordre 1 : $k^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j\omega \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \right]$ puis

$$k \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - j \frac{\omega \chi_s}{2} \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \right]. \text{ On a donc obtenu } \boxed{k' = \frac{\omega}{c}} \text{ et } \boxed{k'' = \frac{\omega^2 \chi_s}{2c} \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right)}.$$

d) La forme de l'onde est donc finalement : $\boxed{p(x,t) = \underline{A} \exp j(\omega t - k'x) \exp(-k''x)}$ en complexes, d'où

$\boxed{p(x,t) = \underline{A} \cos(\omega t - k'x + \varphi) \exp(-k''x)}$ en réels. La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = c$, indépendante de ω : il n'y a pas de dispersion.

e) $\delta = \frac{1}{k''} = \frac{2c}{\omega^2 \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right)} = \frac{c}{2\pi^2 f^2 \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right)}$ soit $\boxed{\delta = \frac{c}{2\pi^2 f^2 \chi_s \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right)}}$. AN $\boxed{\delta = \frac{1}{k''} = 6900 \text{ m}}$ pour $f = 100 \text{ Hz}$, et

$\boxed{\delta = \frac{1}{k''} = 690 \text{ m}}$ pour $f = 10 \text{ kHz}$. L'effet d'amortissement par viscosité est donc totalement négligeable pour des sons graves, mais il peut être sensible à grande distance pour des sons aigus.