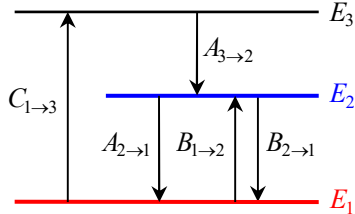


Exercices du chapitre On6

Milieu amplificateur de lumière

1. Étude d'un laser à trois niveaux

Le schéma des niveaux et des transitions d'un laser à trois niveaux est donné ci-dessous, avec les notations des coefficients d'Einstein ; $C_{1 \rightarrow 3}$ est un coefficient de pompage non radiatif, ayant la même dimension que les $A_{m \rightarrow n}$. Les niveaux 1 et 2 sont ceux permettant l'émission laser.



On note $u_f(f)$ la densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement ; $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$ les populations des trois niveaux, avec $N_1 + N_2 + N_3 = N = \text{cte}$; et $\Delta N = N_2 - N_1$.

- Écrire les équations différentielles d'évolution des populations des trois niveaux.
- En régime stationnaire, exprimer ΔN en fonction de N_3 , sachant que $B_{2 \rightarrow 1} = B_{1 \rightarrow 2}$.
- En déduire une condition pour réaliser l'inversion de population, permettant l'émission laser.

2. Émission spontanée contre émission stimulée

Le fonctionnement d'un laser suppose que l'émission stimulée soit largement prépondérante devant l'émission spontanée entre les deux niveaux utilisés.

- Exprimer le rapport r entre la probabilité d'une émission spontanée et celle d'une émission stimulée en fonction des coefficients d'Einstein A et B et de la densité spectrale $u_f(f)$,

définie par $u_{\text{ém}} = \int_0^{+\infty} u_f(f) df$.

- Dans le cas d'un corps noir à l'équilibre thermique, donner une autre expression de r en fonction du facteur de Boltzmann. Calculer l'ordre de grandeur de r dans le cas d'une onde lumineuse, pour un corps à température ordinaire. On donne $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ et $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Le milieu actif d'un laser est maintenu hors équilibre (inversion de population), donc la formule de la question b n'est plus valable. Cependant la relation entre les coefficients A et B (démontrée par Einstein en utilisant le corps noir) est toujours valable. Exprimer r en fonction de h , $u_f(f)$, c et f .
- Évaluer $u_f(f)$ pour un laser hélium-néon de fréquence $f = 4,736 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, de largeur spectrale $\Delta f = 19 \text{ MHz}$, ayant une densité d'énergie $u_{\text{ém}} = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.
En déduire alors la valeur de r dans ce laser.

Faisceau laser

3. Télémétrie laser-Lune

Pour mesurer très précisément la distance de la Terre à la Lune, on envoie un faisceau laser très puissant en direction de

réflecteurs posés sur la Lune dans les années 1970, et on mesure la durée d'un aller-retour de ce faisceau.

Le signal laser utilisé à l'Observatoire de la Côte d'Azur est constitué de salves très brèves de 0,30 ns espacées de 0,10 s, la puissance pendant une salve étant de 1,0 GW. La longueur d'onde du laser utilisé (YAG-néodyme avec doubleur de fréquence) est $\lambda = 532 \text{ nm}$. Le diamètre du faisceau à sa sortie du laser est $d = 1,2 \text{ cm}$.

On prendra la valeur $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour la célérité de la lumière.



- La distance moyenne Terre-Lune étant de 384 000 km, quelle est la durée approximative entre l'émission d'une salve et la réception de l'onde réfléchie ?
- Calculer le nombre de photons dans chaque salve.

Le faisceau a un profil gaussien d'axe (Oz), dont le facteur d'amplitude a pour expression en coordonnées cylindriques :

$$A(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \text{ avec } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{\ell_R^2}}$$

et $\ell_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ (longueur de Rayleigh).

- Exprimer l'intensité (puissance surfacique) du faisceau, et montrer qu'à une abscisse z donnée, 86 % de la puissance est concentrée dans un disque de rayon $w(z)$. Ainsi on peut considérer $w(z)$ comme le rayon du faisceau à l'abscisse z .
- Montrer que le faisceau est conique à grande distance, et préciser l'expression du demi-angle d'ouverture θ .
- Calculer θ , en radians puis en secondes d'arc (de symbole " ou arcsec), pour le laser ci-dessus, en assimilant le *waist* w_0 au rayon de sortie du faisceau.
- On réduit cet angle au moyen d'un télescope (jouant le rôle d'élargisseur de faisceau), mais les turbulences atmosphériques tendent à l'augmenter, de sorte que la valeur effectivement obtenue est $\theta = 2 \text{ arcsec}$. En déduire le diamètre du faisceau à son arrivée sur la Lune.
- Calculer la proportion de photons captés et réfléchis par le réflecteur lunaire, composé d'un réseau de « coins de cubes » équivalents à un miroir plan de diamètre $d_1 = 10 \text{ cm}$.
- Au retour, le faisceau a un demi-angle $\theta' = 6 \text{ arcsec}$ et il est capté par le télescope de diamètre $d_2 = 1,54 \text{ m}$. Calculer la proportion moyenne de photons détectés au retour, puis la proportion globale sur l'aller-retour.
- En réalité cette proportion globale est de l'ordre de $1 \cdot 10^{-20}$. Quels effets supplémentaires permettent d'expliquer la différence avec la valeur calculée précédemment ?
- Déduire de ces valeurs numériques comment on procède en pratique pour calculer la distance Terre-Lune, et évaluer l'incertitude (relative puis absolue) sur cette mesure de distance.

☞ Réponses partielles

- $\frac{dN_3}{dt} = +C_{1 \rightarrow 3}N_1 - A_{3 \rightarrow 2}N_3$.
 - $r = \exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1 \approx 10^{30} \text{ à } 10^{48}$.
 - $u_f(f) \approx \frac{u_{\text{ém}}}{\Delta f} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$.
- $N = 8,0 \cdot 10^{17}$.
 - $\theta = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 5,8 \text{ arcsec}$.
 - Proportion de photons captés à l'aller : $p_1 = 2 \cdot 10^{-10}$.