

## Devoir d'entraînement de physique n° 7

Cet énoncé comporte deux extraits de problèmes, pour lesquels la calculatrice n'était pas autorisée.

### Problème A

(Mines-Ponts MP 2025)

Ce problème aborde la mécanique quantique et aussi quelques aspects de la relativité restreinte (hors programme en MP comme en PC).

### **Impulsion, relativité et mécanique quantique**

Dans le langage général, le sens usuel du mot *impulsion* désigne l'élan initial qu'on peut donner à une particule élémentaire ou à un projectile macroscopique qui poursuit ensuite son mouvement. Le même mot a un sens plus spécifique en physique ; l'impulsion, d'abord définie en mécanique *classique* comme la quantité de mouvement dans de très nombreux cas, se retrouve en mécanique *quantique* comme en mécanique *relativiste* avec un sens étendu.

Nous *admettrons* dans tout ce qui suit que l'impulsion  $\vec{p}$  d'une particule ponctuelle *libre* (non engagée dans une liaison), de masse  $m$  et d'énergie  $E$  est, dans le cadre général de la théorie d'EINSTEIN (1905), donnée par la relation dite du *triangle relativiste* :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1)$$

où  $p = \|\vec{p}\|$  et  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la célérité de la lumière dans le vide ; par ailleurs, cette même impulsion  $\vec{p}$  est, dans la description *ondulatoire* des particules, associée à la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde associée à la particule par la relation de DE BROGLIE (1924) :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

où  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$  est la constante de PLANCK (1900).

## I Impulsion de particules élémentaires

- – 1. Quel est, à votre avis, la nature du « triangle relativiste » évoqué par la relation (1) ? Représenter celui-ci.

Quelle est l'unité usuelle, dans le système international, de l'impulsion  $p$  ? du produit  $pc$  ?

L'énergie des systèmes *macroscopiques* s'exprime usuellement en joule (J) ou en kilowatt-heure ( $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$ ). Dans toute la suite de la partie I, l'énergie des particules *élémentaires* sera donnée en MeV (méga-électron volt) où  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$  et  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Les masses des particules seront données en  $\text{MeV}/c^2$  et leurs impulsions en  $\text{MeV}/c$ . Par exemple la masse de l'électron vaut  $m_e = 0,51 \text{ MeV}/c^2$  et celle du proton vaut  $m_p = 940 \text{ MeV}/c^2$  (ou, si on préfère,  $m_e c^2 = 0,51 \text{ MeV}$  et  $m_p c^2 = 940 \text{ MeV}$ ).

- – 2. On appelle *énergie de repos* d'une particule la valeur  $E_0$  de l'énergie de celle-ci lorsque son impulsion est nulle. Exprimer  $E_0$  pour un proton et calculer sa valeur numérique.

Pour une particule *en mouvement*, le supplément d'énergie  $E_c = E - E_0$  porte le nom d'*énergie cinétique*.

- – 3. On s'intéresse d'abord aux particules vérifiant la relation (1) dans le cas de la *limite classique*, lorsque  $E_c \ll E_0$ . En vous limitant au premier ordre non nul, donner dans ce cas une expression de  $E_c$  en fonction de l'impulsion  $p$  et de la masse  $m$  de la particule. Quelle est alors la relation entre l'impulsion  $\vec{p}$  et la vitesse  $\vec{v}$  d'une particule ? Quelle vitesse maximale peut-on donner à un proton pour rester dans la limite classique telle que  $E_c/E_0 < 1\%$  ? Même question pour un électron.

Si on ne se limite pas aux faibles vitesses, on peut montrer, et on l'admettra, la relation générale entre la masse  $m$ , la vitesse  $\vec{v}$  de norme  $v = \|\vec{v}\|$ , l'impulsion  $\vec{p}$  de la particule et la célérité  $c$  de la lumière :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

□ – 4. En déduire l'expression générale de l'énergie totale  $E = f(E_0, v, c)$  d'une particule de masse  $m$ .

□ – 5. Un photon est une particule associée à une onde électromagnétique dans le vide et dont la vitesse est donc égale à  $c$ . Que peut-on en déduire, pour sa masse, de la relation  $E = f(E_0, v, c)$  établie à la question précédente ?

Déduire de (2) l'expression de l'énergie  $E$  d'un photon en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  puis de la fréquence  $\nu$  de l'onde. Faire l'application numérique dans les cas des ondes lumineuses des domaines bleu ( $\lambda \sim 400$  nm) puis rouge ( $\lambda \sim 600$  nm). On pourra exploiter le fait que  $hc \simeq 1,2 \text{ eV} \times \mu\text{m}$  et on exprimera  $E$  en eV.

## IV L'équation de Klein–Gordon

Lors du développement de la mécanique quantique (ou mécanique ondulatoire), l'onde de matière  $\underline{\Psi}(\vec{r}, t)$  a d'abord été considérée comme solution de l'équation de SCHRÖDINGER (4) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\Psi} + V(\vec{r})\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} \quad \text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ et } i^2 = -1 \quad (4)$$

pour une particule de masse  $m$  repérée par sa position  $\vec{r}$  et soumise à l'interaction décrite par la fonction potentiel scalaire  $V(\vec{r})$ . En 1926, KLEIN et GORDON en ont proposé une version modifiée qu'on écrira :

$$\hbar^2 c^2 \Delta \underline{\Psi} + \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r}) \right)^2 \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = m^2 c^4 \underline{\Psi}(\vec{r}, t) \quad (5)$$

Dans la suite on s'intéressera exclusivement aux solutions de l'une ou l'autre équation, de la forme :

$$\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - p(E)x) \right]$$

où  $\underline{\psi}_0$  est une certaine constante complexe,  $x$  est l'une des coordonnées cartésiennes de  $\vec{r}$ ,  $E > 0$  est l'énergie de la particule et  $p(E) > 0$  son impulsion.

□ – 20. L'état associé à cette fonction d'onde est-il stationnaire ?

Dans quel sens le mouvement de la particule décrite par cette onde a-t-il lieu ?

Exprimer les vitesses de phase  $v_\varphi$  et de groupe  $v_g$  en fonction de  $E$ , de  $p(E)$  et de sa dérivée.

□ – 21. Exprimer  $p(E)$  et  $v_g(E)$  dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de SCHRÖDINGER dans un domaine où  $V$  est constant. En déduire le caractère relativiste ou non du modèle associé à l'équation de SCHRÖDINGER.

□ – 22. Répondre aux mêmes questions dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de KLEIN–GORDON (5).

On s'intéresse enfin à la résolution du problème physique suivant : la particule étudiée est libre ( $V = 0$ ) pour  $x < 0$  et  $x > a$  et pourvue d'une énergie  $E$ , tandis que, dans l'intervalle  $x \in [0, a]$ , elle est soumise à une interaction caractérisée par  $V = V_0 > E$  (figure 5) et même  $V_0 - E > mc^2$ . Les solutions de l'équation (de SCHRÖDINGER ou de KLEIN-GORDON) seront donc écrites, pour  $x < 0$  et  $x > a$ , sous les formes respectives :

$$\underline{\Psi}(x < 0, t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right] + \underline{R} \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et + px) \right]$$

$$\underline{\Psi}(x > a, t) = \underline{T} \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right]$$

où  $\underline{T}$  et  $\underline{R}$  sont deux constantes complexes.

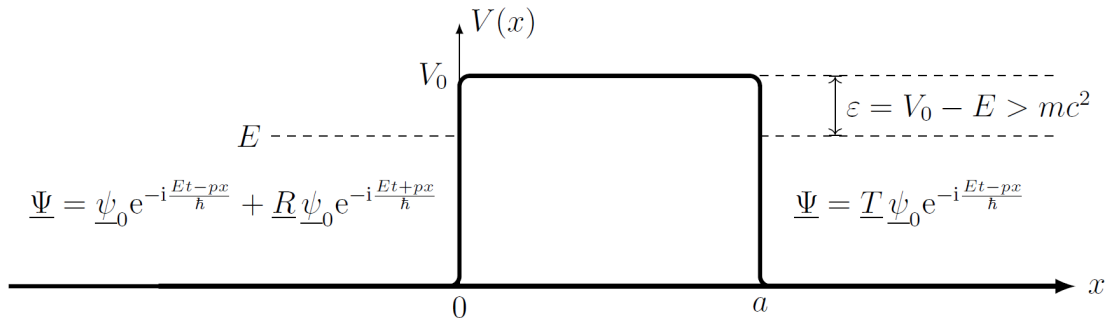


FIGURE 5 – Barrière de potentiel

On se place d'abord dans le cas de l'équation de SCHRÖDINGER.

- – 23. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine  $x \in [0, a]$  ?  
 Quelles relations permettent de calculer  $\underline{R}$  et  $\underline{T}$  ? *On ne demande pas de les exprimer ici !*  
 Quel phénomène physique peut-on mettre ainsi en évidence ?  
 Quelle est l'interprétation physique de  $|\underline{T}|^2$  ?

On se place maintenant dans le cas de l'équation de KLEIN-GORDON.

- – 24. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine  $x \in [0, a]$  ? On notera qu'en introduisant  $\varepsilon = E - V_0$ , on a  $q^2 = \frac{(\varepsilon - mc^2)(\varepsilon + mc^2)}{c^2} > 0$ .

Les mêmes relations que dans l'étude de la barrière de potentiel dans le cadre de l'équation de SCHRÖDINGER conduisent, pour l'onde de KLEIN-GORDON, à la relation (que l'on admettra) :

$$|\underline{T}|^2 = \frac{1}{|\cos \varphi - i\alpha \sin \varphi|^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{qa}{\hbar}$$

- – 25. Déterminer la valeur maximale de  $|\underline{T}|^2$ . Commenter.

**Problème B**  
(X-ENS PC 2023)

**Mesure de la constante de structure fine et incertitudes**

**Constantes fondamentales et autres valeurs numériques :**

- célérité de la lumière dans le vide :  $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 \simeq 9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- charge élémentaire :  $e \simeq 1,5 \times 10^{-19} \text{ C}$
- constante de Planck :  $h \simeq 7 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- constante de Planck réduite :  $\hbar = h/2\pi \simeq 1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- constante de Boltzmann :  $k_B \simeq 1,5 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- masse atomique d'un atome de Rubidium 87 :  $m \simeq 1,5 \times 10^{-25} \text{ kg}$

## Introduction

Ce sujet propose de s'intéresser à la mesure de la constante de structure fine  $\alpha$ , dont Richard Feynman, célèbre physicien du XX<sup>e</sup> siècle, disait qu'elle est "*l'un des plus grands mystères de la physique : un nombre magique qui nous parvient sans que l'homme puisse le comprendre.*"

Cette constante, sans dimension, est directement reliée à l'interaction électromagnétique. Elle est donnée par la relation :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (1)$$

Une valeur approchée de  $\alpha$  est  $1/137$ . La mesure la plus précise à ce jour donne :

$$1/\alpha = 137,035999206 \pm 11 \times 10^{-9} \quad (2)$$

soit une incertitude relative de l'ordre de  $8 \times 10^{-11}$ . Ce sujet a pour but d'expliquer comment la constante de structure fine  $\alpha$  a pu être mesurée avec une telle précision.

## Question préliminaire

Une autre détermination précise de  $\alpha$  a pu être effectuée de manière indépendante. Cette autre détermination fait en particulier intervenir des calculs issus du "Modèle standard", qui est le cadre théorique de notre compréhension actuelle des forces forte, faible et électromagnétique. La valeur obtenue est :

$$1/\alpha = 137,03599915 \pm 3 \times 10^{-8} \quad (3)$$

**1.** Comparer les deux valeurs de  $1/\alpha$  données par les Éq. (2) et Éq. (3) en calculant leur écart normalisé (que l'on comparera à 2). La théorie du Modèle Standard semble-t-elle valide au regard de ces deux valeurs ?

Dans la partie I.1, nous nous intéresserons au lien entre  $\alpha$  et une autre constante fondamentale connue avec précision : la constante de Rydberg  $R_\infty$ . Nous étudierons dans toute la suite du sujet le principe de la mesure de la masse  $m$  de l'atome de Rubidium 87, qui permet de remonter à  $\alpha$ .

## I.1 Lien entre la constante de structure fine $\alpha$ et la constante de Rydberg $R_\infty$

En 1888, Johannes Rydberg trouve une formule empirique qui permet d'exprimer les longueurs d'onde des raies d'émission de l'hydrogène :

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (4)$$

avec  $n_1$  et  $n_2$  deux entiers ( $n_1 < n_2$ ), et  $R_\infty$  une constante alors appelée constante de Rydberg. Cette observation marque les débuts de l'avènement de la physique quantique.

Niels Bohr propose en 1913 un modèle "semi-classique" permettant d'expliquer ces observations. Il développe un "modèle planétaire" de l'atome d'hydrogène, alors modélisé par un proton de charge  $+e$  supposé fixe, et un électron de charge  $-e$  et de masse  $m_e$ , non relativiste, soumis à la force électrostatique du proton et en orbite circulaire autour de lui. Niels Bohr fait également l'hypothèse de la quantification du moment cinétique orbital  $L$  de l'électron en écrivant  $L = n\hbar$  où  $n$  est un entier naturel non nul. À chaque valeur de  $n$  correspond une orbite différente.

- 2.a Pourquoi un tel modèle est-il qualifié de semi-classique ?
- 2.b Exprimer les vitesses  $v_n$  associées à chaque orbite. Sur quelle orbite la vitesse maximale est-elle atteinte ? Exprimer sa valeur en fonction de  $c$  et de  $\alpha$ . Est-il alors légitime de considérer que l'électron est non relativiste dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène ?
- 2.c Calculer l'énergie mécanique  $E_n$  de l'électron en fonction de  $n$ . Retrouver la formule de Rydberg (Éq. (4)) et en déduire l'expression de  $R_\infty$  en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $h$ ,  $c$  et  $\epsilon_0$ .

Si un tel modèle a ses limites, la constante de Rydberg continue d'intervenir dans les modèles théoriques les plus perfectionnés pour décrire les raies d'émission de l'atome d'hydrogène. La mesure précise de ces raies a permis de déterminer  $R_\infty$  avec une précision relative de  $2 \times 10^{-12}$ .

- 3.a Montrer

$$\alpha = \sqrt{\frac{2R_\infty}{c} \times \frac{m}{m_e} \times \frac{h}{m}} \quad (5)$$

avec  $m$  la masse d'un atome de Rubidium.

On fait ici intervenir le rapport  $m_e/m$  car il est expérimentalement plus aisé de mesurer indépendamment la masse  $m$  de l'atome de Rubidium 87 (beaucoup plus grande que celle d'un électron) et la masse relative de l'électron par rapport à cet atome. Le rapport  $m/m_e$  a pu être mesuré avec une précision relative de  $7 \times 10^{-11}$ .

- 3.b On note  $u(\alpha)$  l'incertitude-type sur  $\alpha$ . Donner la formule reliant l'incertitude relative  $u(\alpha)/\alpha$  sur la mesure de  $\alpha$  à celle des autres grandeurs  $R_\infty$ ,  $m/m_e$  et  $m$  qui interviennent dans son expression d'après l'Éq. (5). Pourquoi aucune incertitude ne doit être associée à la valeur de  $c$  et de  $h$  ? Vérifier que l'on a :

$$\frac{u(m)}{m} \simeq 1,5 \times 10^{-10} \quad (6)$$