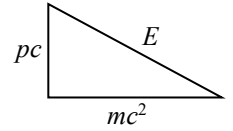


Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 7□ Problème A

1. Cette relation est analogue au théorème de Pythagore pour un triangle rectangle, dont les côtés auraient la dimension d'une énergie.

Unité SI de l'impulsion  $p$  :  $\boxed{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$ . Le produit  $pc$  s'exprime donc en  $\boxed{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}$ , c'est-à-dire en joules (J), ce qui est bien cohérent avec la formule du triangle.



2. Lorsque  $p$  est nulle,  $E_0 = mc^2$  soit  $\boxed{E_0 = m_p c^2}$  pour un proton. La valeur numérique est donnée :  $\boxed{E_0 = 940 \text{ MeV}}$ .

3.  $E_c = E - E_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2 = mc^2 \left( \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} - 1 \right)$ . L'approximation  $E_c \ll E_0$  équivaut à  $p^2 \ll m^2 c^2$ , et un DL à l'ordre 1

donne alors :  $E_c \approx mc^2 \left( 1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} - 1 \right)$  soit  $\boxed{E_c \approx \frac{p^2}{2m}}$ . On retrouve la formule classique, correspondant à  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$  et  $\boxed{\vec{p} = m \vec{v}}$ .

$\frac{E_c}{E_0} < \frac{1}{100}$  équivaut alors à  $\frac{p^2}{2m^2 c^2} = \frac{m^2 v^2}{2m^2 c^2} < \frac{1}{100}$  soit  $\boxed{v < \frac{\sqrt{2}}{10} c \approx 0,14 c}$ . C'est la même valeur pour toutes les particules.

4.  $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{m^2 c^4 + \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} c^2} = \sqrt{m^2 c^4 + \frac{m^2 v^2 c^4}{c^2 - v^2}}$  soit  $\boxed{E = E_0 \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$  ( $= \gamma m c^2$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ).

5. On détermine  $E_0 = E \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$ . Or  $E_0 = mc^2$  donc  $\boxed{m_{\text{photon}} = 0}$ . Alors il reste  $E = pc$ , soit  $\boxed{E = \frac{hc}{\lambda} = h\nu}$ .

AN  $E_{\text{bleu}} = \frac{1,2}{0,4}$  soit  $\boxed{E_{\text{bleu}} = 3 \text{ eV}}$  et  $E_{\text{rouge}} = \frac{1,2}{0,6}$  soit  $\boxed{E_{\text{rouge}} = 2 \text{ eV}}$ .

20. La densité de probabilité vaut :  $|\underline{\Psi}|^2 = |\underline{\psi}_0|^2$ . Elle est indépendante du temps : la fonction d'onde est stationnaire.

Dans l'expression de la phase  $-\frac{Et - p(E)x}{\hbar}$ , les termes en  $x$  et en  $t$  sont de signes contraires, donc lorsque  $t$  augmente, il faut que  $x$  augmente pour retrouver la même phase : la particule/onde se déplace dans le sens des  $x$  croissants. La phase peut s'écrire  $-(\omega t - kx)$

avec  $\omega = \frac{E}{\hbar}$  et  $k = \frac{p(E)}{\hbar}$ . Vitesse de phase :  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$  soit  $\boxed{v_\phi = \frac{E}{p(E)}}$ . Vitesse de groupe :  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  soit  $\boxed{v_g = \frac{dE}{dp} = \left( \frac{dp}{dE} \right)^{-1}}$ .

21. On injecte la forme d'onde proposée dans l'équation de Schrödinger :  $-\frac{\hbar^2}{2m} \left( -\frac{p(E)^2}{\hbar^2} \right) \underline{\Psi} + V \underline{\Psi} = i\hbar \left( -\frac{iE}{\hbar} \right) \underline{\Psi}$  d'où

$E = \frac{p(E)^2}{2m} + V$  ou encore  $\boxed{p(E) = \sqrt{2m(E - V)}}$ . On en déduit :  $v_g = \left( \frac{dp}{dE} \right)^{-1} = \left( \frac{2m}{2\sqrt{2m(E - V)}} \right)^{-1}$  soit  $\boxed{v_g = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}} = \frac{p(E)}{m}}$ .

On retrouve les formules classiques de l'énergie mécanique (somme des termes cinétique et potentiel) et de la quantité de mouvement (produit de la masse par la vitesse) : l'équation de Schrödinger est non relativiste.

22. De même :  $\hbar^2 c^2 \left( -\frac{p(E)^2}{\hbar^2} \right) \underline{\Psi} + \left[ -\hbar^2 \left( -\frac{E^2}{\hbar^2} \right) + V^2 - 2i\hbar V \left( -\frac{iE}{\hbar} \right) \right] \underline{\Psi} = m^2 c^4 \underline{\Psi}$  d'où  $(E - V)^2 = p(E)^2 c^2 + m^2 c^4$  ou encore

$\boxed{p(E) = \sqrt{\frac{(E - V)^2}{c^2} - m^2 c^2}}$ . En différentiant la première on obtient :  $2(E - V) dE = 2p(E) dp(E) c^2 + 0$  d'où  $\boxed{v_g = \frac{p(E) c^2}{E - V}}$ .

Pour  $V = 0$  on retrouve la formule  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  de la particule libre : l'équation de Klein-Gordon est relativiste.

23. Dans le domaine  $[0, a]$ , c'est-à-dire dans la barrière, pour  $E < V_0$  on ne peut avoir qu'une onde évanescente, avec une exponentielle spatiale réelle  $\exp(\pm qx)$  solution de l'équation de Schrödinger stationnaire  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \varphi(x) = 0$ . Pour calculer  $\underline{R}$  et  $\underline{T}$ , il faut appliquer les conditions aux limites en 0 et en  $a$  : continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première par rapport à  $x$ .

On voit ainsi apparaître l'effet tunnel, c'est-à-dire une probabilité non nulle pour la particule de franchir la barrière, alors que ce serait impossible dans le modèle classique.  $|\underline{T}|^2$  est justement la probabilité pour une particule de franchir la barrière.

24. Cherchons toujours une solution sous forme d'OPPH généralisée :  $\underline{\Psi}(x, t) = \underline{\psi}_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - qx)\right)$  dans la région  $[0, a]$ .

Si  $q$  est réel, il s'agit alors d'une véritable onde progressive (onde de De Broglie), comme dans les deux autres régions, mais si  $q$  est imaginaire pur, c'est une onde évanescente (comme avec l'équation de Schrödinger). On utilise la relation de dispersion trouvée à la question 22 :  $(E - V_0)^2 = q^2 c^2 + m^2 c^4$  soit  $q^2 c^2 = \varepsilon^2 - m^2 c^4$ . Ce carré est positif puisque  $\varepsilon > mc^2$ , donc  $q$  est réel. On obtient donc aussi une onde progressive, ou plutôt une somme de deux ondes progressives de sens contraires, dans la barrière.

25.  $|\underline{T}|^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi}$ . Puisque c'est une probabilité elle ne peut pas dépasser 1, et on peut trouver des cas où  $\boxed{(|\underline{T}|^2)_{\text{max}} = 1}$ . En

excluant le cas  $\alpha = 1$ , qui correspond à  $p = q$  soit  $V_0 = 0$  (pas de barrière), on l'obtient lorsque  $\sin \varphi = 0$  et  $\cos \varphi = \pm 1$ , soit pour

$\varphi = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $q_n = n \frac{\pi \hbar}{a}$ . Pour une série de valeurs de son énergie, la particule est certaine de franchir la barrière !

La barrière est alors l'équivalent d'une couche anti-reflet pour la lumière.

□ **Problème B**

1. Écart normalisé :  $E = \frac{|(1/\alpha)_1 - (1/\alpha)_2|}{\sqrt{u(1/\alpha)_1^2 + u(1/\alpha)_2^2}}$ . AN  $E = \frac{(206-150) \times 10^{-9}}{\sqrt{11^2 + 30^2} \times 10^{-9}} = \frac{56}{\sqrt{1021}} \approx \frac{56}{32}$  soit  $E = 1,8$ . On trouve  $E < 2$ ,

(même si on est proche de la limite), ce qui indique que la valeur fournie par le modèle standard est acceptable.

2.a. Ce modèle comporte des aspects classiques et quantiques : la description du mouvement du point matériel selon une trajectoire bien définie est conforme à la mécanique classique, mais l'hypothèse d'une quantification du moment cinétique (donc de l'énergie) est caractéristique de la mécanique quantique.

2.b. Le moment cinétique orbital de l'électron, par rapport à un axe ( $Oz$ ) orthogonal au plan de sa trajectoire, est :  $L = \vec{L} \cdot \vec{e}_z = m_e (\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z = m_e (r_n \vec{e}_r \wedge v_n \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = m_e r_n v_n$  (en utilisant une base polaire centrée sur le noyau). L'hypothèse de quantification de Bohr s'écrit donc :  $m_e r_n v_n = n \hbar$ . On trouve une autre relation entre  $r_n$  et  $v_n$  en appliquant le PFD à l'électron, soumis uniquement à la force électrique  $\vec{F}$  exercée par le noyau :  $m \vec{a} = \vec{F}$ . Projection sur  $\vec{e}_r$  :

$-m \frac{v_n^2}{r_n} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}$  d'où  $m_e r_n v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 v_n}$ . Alors  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 v_n} = n \hbar$  d'où  $v_n = \frac{e^2}{4n\pi\epsilon_0 \hbar}$ . La vitesse maximale est donc celle de

l'orbite  $n=1$  :  $v_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = \alpha c$ . Puisque  $\alpha \sim 10^{-2}$ , alors  $\frac{v_1}{c} \sim 10^{-2}$  et surtout  $\frac{v_1^2}{c^2} \sim 10^{-4} \ll 1$  : l'électron est non relativiste.

2.c.  $E_n = E_{c,n} + E_{p,n} = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - m_e v_n^2 = -\frac{1}{2} m_e v_n^2$  soit  $E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2 n^2} = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2 n^2} = -\alpha^2 \frac{m_e c^2}{2n^2}$ . Lorsqu'un

atome passe d'un niveau d'énergie  $n_2$  à  $n_1 < n_2$ , il émet un photon d'énergie  $E = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$ . Or

$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$  donc  $\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = R_\infty \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$  avec  $R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c}$ .

3.a.  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar c}$  donc  $R_\infty = \frac{m_e c}{2\hbar} \alpha^2$ , d'où  $\alpha = \sqrt{\frac{2R_\infty \hbar}{m_e c}}$ , que l'on peut écrire  $\alpha = \sqrt{\frac{2R_\infty}{c} \times \frac{m}{m_e} \times \frac{h}{m}}$ .

3.b. Aucune incertitude n'est associée à  $c$  et  $h$  car ces grandeurs ont une valeur exacte par définition des unités SI de longueur et de masse respectivement. On utilise la formule d'incertitude composée (ou propagation des incertitudes) :

$\frac{u(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{u(R_\infty)}{R_\infty} \right)^2 + \left( \frac{u(m/m_e)}{m/m_e} \right)^2 + \left( \frac{u(m)}{m} \right)^2}$ .