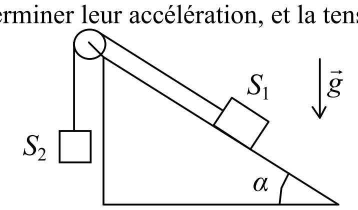
# Exercices de révisions de mécanique

*Utilisation du PFD*

**1. Mouvements de deux solides liés**

Deux solides $S_1$ et $S_2$ sont liés par un fil idéal inextensible et une poulie idéale. $S_1$ glisse sans frottements sur un plan incliné et $S_2$ se déplace verticalement (les deux restant dans le plan de figure). Ces deux solides étant considérés comme des points matériels, déterminer leur accélération, et la tension $T$ du fil.




**2. Mouvement d'une poussière chargée**

Une poussière $M$, de masse $m$ et de charge $q > 0$, entre à $t = 0$, au point $O$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_y}$ ($v_0 \geq 0$), dans une zone où règne un champ magnétostatique $\vec{B} = B\overrightarrow{e_x}$. Son poids n'est pas négligeable, le champ de pesanteur étant $\vec{g} = g\overrightarrow{e_z}$.

a) Déterminer les équations différentielles vérifiées par ses trois coordonnées cartésiennes.

On posera $\omega_c = \dfrac{qB}{m}$ et $r_0 = \dfrac{g}{\omega_c^2}$.

b) En résolvant l'une des équations précédentes, montrer que le mouvement de la poussière est plan.

c) Pour résoudre les deux autres équations, qui sont couplées, on introduit une variable complexe $u = y + iz$. Déterminer et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. En déduire $y(t)$ et $z(t)$.

d) Calculer la valeur moyenne $\overrightarrow{v_e}$ du vecteur vitesse de $M$. Donner l'allure de sa trajectoire.

e) Quelle serait la trajectoire si le poids était négligeable ?

*Utilisation de méthodes énergétiques*

**3. Oscillations d'une molécule**

Une molécule HCl est modélisée par deux atomes ponctuels séparés par une distance $r$, sur un axe supposé fixe dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}$. On considérera pour simplifier que l'atome Cl est immobile dans $\mathfrak{R}$, et que son interaction avec l'atome H, de masse $m$, est décrite par l'énergie potentielle :

$E_p(r) = \dfrac{A}{r^{12}} - \dfrac{B}{r}$ où $A = 1{,}06\cdot 10^{-138}\ \mathrm{J\cdot m^{12}}$, $B = 9{,}22\cdot 10^{-29}\ \mathrm{J\cdot m}$.

L'atome H n'est soumis à aucune autre force (poids négligeable). On donne $m = 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$.

a) Déterminer la force à laquelle est soumis l'atome H. Quelle est l'origine physique de chacun des deux termes ?

b) Tracer la courbe de $E_p(r)$. Déterminer la position d'équilibre $r_e$ et discuter sa stabilité.

c) À quelle condition l'atome H se trouve-t-il dans un état lié (c'est-à-dire reste lié à Cl dans la molécule) ? Définir et calculer l'énergie de dissociation $E_d$ de la molécule ; on donnera sa valeur en électronvolts ($1\,\mathrm{eV} = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$).

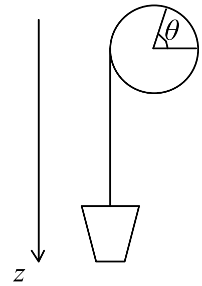
d) Déterminer la fréquence des petites oscillations de l'atome d'hydrogène autour de sa position d'équilibre.

e) Dessiner l'allure du portrait de phase de la molécule.

*Utilisation du théorème du moment cinétique*

**4. Déroulement d'une chaîne**

Une poulie est constituée d'un cylindre de révolution de rayon $R$ et de moment d'inertie $J$ par rapport à son axe. Elle peut tourner sans frottements autour de cet axe, immobile et horizontal. Une chaîne d'épaisseur et de masse négligeables est enroulée sur le cylindre et retient un seau de masse $M$.




Le système étant laissé libre, déterminer l'accélération du seau en appliquant le théorème du moment cinétique au système complet (cylindre, chaîne, seau).

**5. Mouvement à force centrale de rappel élastique**

Dans un référentiel $\mathfrak{R}$ galiléen lié au repère $(Oxyz)$, un point matériel $M$ de masse $m$ est mobile sans contrainte cinématique. Il subit une unique force $\vec{F}$, force centrale dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r) = \dfrac{1}{2}k\,r^2$ où $k$ est une constante positive et $r$ la distance $OM$. En coordonnées cartésiennes, les conditions initiales sont les suivantes :

$x(0) = a > 0$ ; $y(0) = z(0) = 0$ ; $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ ; $\dot{y}(0) = v_0 > 0$.

a) Déterminer la force $\vec{F}$, et montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de $\overrightarrow{OM}$.

b) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de $M$ en $O$ se conserve, et déterminer sa valeur avec les conditions initiales. En déduire que le mouvement est situé dans un plan que l'on précisera.

c) Montrer que l'énergie mécanique $E_m$ de $M$ se conserve, et déterminer sa valeur.

d) Démontrer que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement et préciser sa valeur. Déduire alors de la conservation de l'énergie une équation liant $r$, $\dot{r}$ et les constantes $m$, $a$, $v_0$ et $k$.

e) Définir une énergie potentielle effective $E_{p,\mathrm{eff}}(r)$ pour le point $M$, et tracer l'allure de la courbe de cette fonction.

Montrer alors que la trajectoire est comprise entre deux cercles dont on donnera les rayons.

f) En utilisant le PFD (que l'on peut intégrer vectoriellement), déterminer les équations horaires cartésiennes de $M$. En déduire la nature exacte de la trajectoire, et vérifier le résultat de la question précédente. Représenter la trajectoire sur un schéma.

g) Quelle est la différence entre cette trajectoire et celle d'une planète autour du Soleil ?

*Équations locales de la dynamique des fluides*

**6. Fluide visqueux entraîné par une plaque**

On considère une plaque solide plane supposée infinie confondue avec le plan $(Oxz)$. Le demi-espace $y > 0$ est rempli d'un fluide visqueux incompressible de viscosité dynamique $\eta$. La plaque est animée d'une vitesse sinusoïdale d'expression : $\overrightarrow{v_0} = V_m\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$.

On néglige l'action de la pesanteur.

a) Écrire l'équation de Navier–Stokes dans ce cas.

b) De quelles variables dépend la vitesse dans le fluide ? Quelle est sa direction ?

c) Montrer que dans ce cas l'accélération convective est nulle. En déduire que la pression est uniforme. Quelle est l'équation vérifiée par la vitesse ?

d) On cherche la solution sous la forme complexe :

$$\underline{\vec{v}} = f(y)\exp(j\omega t)\,\overrightarrow{e_x}\ .$$

Déterminer la forme générale de $f(y)$, en introduisant la grandeur $\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\rho\omega}}$. En déduire l'expression réelle du champ de vitesse.

e) Quelle est la signification de $\delta$ ? Calculer sa valeur pour l'eau ( $\eta = 1{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{Pa}\cdot\text{s}$ ) à une fréquence de 5 Hz.

f) Cette situation peut servir à modéliser la transmission d'une secousse sismique de cisaillement à travers la partie liquide du noyau terrestre, extrêmement visqueuse et de masse volumique importante. Déterminer $\delta$ pour la fréquence de 5 Hz, sachant que la viscosité cinématique des roches est $\nu = 0{,}01\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Que peut-on en conclure sur la propagation des ondes sismiques de cisaillement ?

***Bilan macroscopique***

**7. Puissance d'un sèche-cheveux**

Un sèche-cheveux aspire, par sa partie arrière (section d'entrée $S_\text{e} = 12\ \text{cm}^2$ ), de l'air à température ambiante (20 °C), et éjecte à l'avant un flux d'air rapide ( $v_\text{s} = 70\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ). Pour cela, il comporte une hélice alimentée par un moteur électrique. L'air sortant du sèche-cheveux constitue un écoulement sensiblement homocinétique (vecteur vitesse uniforme), sur toute la section de sortie $S_\text{s} = 5\ \text{cm}^2$ et sur quelques dizaines de centimètres de longueur, avant de devenir turbulent. *Données :* $R = 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ; $\rho_\text{e} = 1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ; $M = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

a) Déterminer la puissance du sèche-cheveux.

b) On allume en plus le système de chauffage du sèche-cheveux, l'air sortant à la température de 90 °C. Déterminer la puissance totale du sèche-cheveux (mécanique et thermique).

---

☞ *Réponses partielles*

**1.** $\vec{a}(S_2) = \dfrac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}\, g\,\overrightarrow{e_z}$ .  **2.** a) $\ddot{x} = 0$ ; $\ddot{y} = +\omega_\text{c}\dot{z}$ ; $\ddot{z} = g - \omega_\text{c}\dot{y}$ .

**3.** b) $r_\text{e} = 1{,}27\cdot 10^{-10}\ \text{m}$ . d) $f = 8{,}69\cdot 10^{13}\ \text{Hz}$ .  **4.** $\vec{a} = \dfrac{MR^2}{J + MR^2}\, g\,\overrightarrow{e_z}$ .

**5.** a) $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$ . b) $\overrightarrow{L_O} = m\,a\,v_0\,\overrightarrow{e_z}$ . d) $r_1 = a$ et $r_2 = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ .

**6.** b) $\vec{v}(M,t) = v_x(y,t)\,\overrightarrow{e_x}$ .