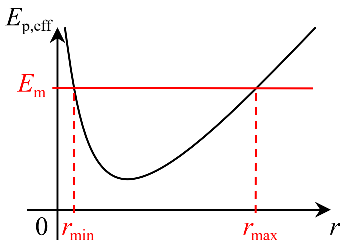
Exercices de révisions de mécanique – Corrigé des exercices 5 (fin), 6 et 7

¤ **Exercice 5** (fin)

On a trouvé aux premières questions : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = m\,a\,v_0\,\overrightarrow{e_z}}$; $\boxed{E_\text{m} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2}$.

d) Dans le plan (*Oxy*) on utilise maintenant les coordonnées *cylindriques* : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ (dans ce plan, les r et $\overrightarrow{e_r}$ sphériques se confondent avec les r et $\overrightarrow{e_r}$ cylindriques, donc l'expression de la force reste la même), et $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. Le moment cinétique s'écrit alors : $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m\,r\,\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = m\,r^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$. Par identification avec $\overrightarrow{L_O} = m\,a\,v_0\,\overrightarrow{e_z}$, on trouve $\boxed{r^2\dot{\theta} = \text{cte} = a\,v_0}$ (il s'agit de la constante des aires, souvent notée *C*). La conservation de l'énergie mécanique s'écrit : $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2$.

En remplaçant $\dot{\theta}$ par $\frac{a\,v_0}{r^2}$ on obtient : $\boxed{\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{a^2v_0^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2}$.

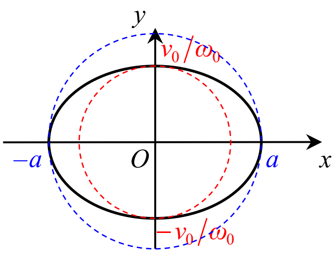


e) L'équation précédente peut encore s'écrire : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\text{p,eff}(r) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2$ en posant $\boxed{E_\text{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{a^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2}$. Cette fonction, toujours positive, tend vers l'infini en zéro et à l'infini, d'où l'allure de la courbe ci-contre. Sachant que $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, on a toujours $E_\text{p,eff}(r) \leq \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2 = E_\text{m}$, ce qui délimite le domaine accessible pour r : $r_\text{min} \leq r \leq r_\text{max}$.

r étant la distance *OM* dans le plan (*Oxy*), cela signifie que <u>la trajectoire de *M* est comprise entre deux cercles</u> de rayons r_min et r_max.

Ces deux rayons sont les solutions de l'équation : $\frac{1}{2}m\frac{a^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2$. L'une de ces deux racines est évidente, c'est $\boxed{r = a}$, valeur pour laquelle les termes s'identifient deux à deux. L'autre est presque aussi évidente, elle s'obtient aussi en identifiant les termes deux à deux, mais dans l'ordre inverse : $\boxed{r = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}}$. (Si on ne les voit pas de cette façon « évidente », on peut les obtenir en résolvant une équation bicarrée.) En l'absence de valeurs numériques, on ne sait pas laquelle est r_min et laquelle est r_max.

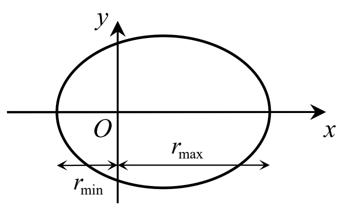
f) PFD pour *M* dans $\mathfrak{R}$: $m\vec{a} = -k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$. Solution : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{A}\cos(\omega_0 t) + \vec{B}\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



CI : $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{A} = a\,\overrightarrow{e_x}$; $\vec{v}(0) = \omega_0\vec{B} = v_0\overrightarrow{e_y}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = a\cos(\omega_0 t)\overrightarrow{e_x} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{e_y}}$, ce qui donne en projections : $\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t)}$ et $\boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

Ces équations sont celles d'une <u>ellipse de centre *O*</u>. On peut obtenir son équation cartésienne en éliminant t grâce à l'égalité $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$, soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\omega_0^2 y^2}{v_0^2} = 1$.

On retrouve bien les deux distances extrêmes a et $\frac{v_0}{\omega_0} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}$, atteintes deux fois chacune, l'une sur l'axe (*Ox*) et l'autre sur (*Oy*).



g) La trajectoire d'une planète autour du Soleil est une <u>ellipse de *foyer O*</u> (centre du Soleil), et non de *centre O*. Les deux distances extrémales sont dans ce cas sur le même axe, et atteintes une seule fois chacune.

¤ **Exercice 6**

a) Équation de Navier–Stokes, en négligeant la pesanteur : $\boxed{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v}}$.

b) La plaque étant modélisée comme infinie selon (*Ox*) et (*Oz*), le problème peut être considéré comme <u>invariant par translation</u> selon ces deux axes : le champ de vitesse est alors indépendant de x et de z, il ne reste donc que les variables y et t.
L'excitation (mouvement de la plaque) étant uniquement selon (*Ox*), tout plan parallèle à (*Oxy*) est un plan de symétrie du problème : la vitesse est donc parallèle à ce plan, c'est-à-dire n'a pas de composante sur $\overrightarrow{e_z}$. Il reste donc $\vec{v}(M,t) = v_x(y,t)\overrightarrow{e_x} + v_y(y,t)\overrightarrow{e_y}$.

Enfin le fluide est incompressible, donc $\text{div}\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire que v_y est uniforme de haut en bas : la seule valeur possible est $v_y = 0$ (sinon le fluide traverserait la plaque). Finalement, il reste : $\boxed{\vec{v}(M,t) = v_x(y,t)\overrightarrow{e_x}}$.

c) $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = v_x\frac{\partial}{\partial x}v_x(y,t)\overrightarrow{e_x}$ soit $\boxed{\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \vec{0}}$. L'équation de Navier–Stokes devient donc : $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v}$.

D'après les invariances citées précédemment, la pression est également une fonction $P(y,t)$, donc $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \dfrac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y}$.

Les deux projections de l'équation donnent alors : sur $\overrightarrow{e_x}$, $\boxed{\rho \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$; sur $\overrightarrow{e_y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ donc <u>la pression est uniforme</u>.

d) On injecte la forme cherchée dans l'équation : $\rho f(y) j\omega \exp(j\omega t) = \eta f''(y)\exp(j\omega t)$ soit $f''(y) - j\dfrac{\omega\rho}{\eta} f(y) = 0$. Sachant que les racines carrées de j sont $\pm\dfrac{1+j}{\sqrt{2}}$, l'équation peut s'écrire $f''(y) - \left(\dfrac{1+j}{\delta}\right)^2 f(y) = 0$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\rho\omega}}$. Solution générale : $f(y) = A\exp\left(\dfrac{(1+j)y}{\delta}\right) + B\exp\left(-\dfrac{(1+j)y}{\delta}\right) = A\exp\left(\dfrac{y}{\delta}\right)\exp\left(j\dfrac{y}{\delta}\right) + B\exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)\exp\left(-j\dfrac{y}{\delta}\right)$ avec A et B complexes.

Première condition aux limites en $y \to +\infty$: v_x ne peut pas diverger, donc $A = 0$. Il reste $\boxed{f(y) = B\exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)\exp\left(-j\dfrac{y}{\delta}\right)}$, soit $\underline{\vec{v}}(y,t) = B\exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)\exp\left(-j\dfrac{y}{\delta}\right)\exp(j\omega t)\overrightarrow{e_x} = B\exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)\exp\left(j\left(\omega t - \dfrac{y}{\delta}\right)\right)\overrightarrow{e_x} = |B|\exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)\exp\left(j\left(\omega t - \dfrac{y}{\delta} + \varphi_B\right)\right)\overrightarrow{e_x}$ qui devient en réels : $\vec{v}(y,t) = |B|\exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{y}{\delta} + \varphi_B\right)\overrightarrow{e_x}$.

En $y = 0$: $v_x(0,t) = V_\text{m}\cos(\omega t) = |B|\cos(\omega t + \varphi_B)$ donc $|B| = V_\text{m}$ et $\varphi_B = 0$. Finalement : $\boxed{\vec{v}(y,t) = V_\text{m}\exp\left(-\dfrac{y}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{y}{\delta}\right)\overrightarrow{e_x}}$.

Il s'agit d'une onde plane progressive, amortie le long de sa direction de propagation. Cette onde est *transverse*, puisque les couches de fluide oscillent selon (Ox), tandis que l'onde se propage selon (Oy) : une telle onde de vitesse est appelée *onde de cisaillement* (alors qu'une onde longitudinale, c'est-à-dire acoustique, est une *onde de compression*).

e) δ est la <u>distance caractéristique d'amortissement</u>. Pour l'eau à 5 Hz : $\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\rho 2\pi f}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 1{,}0\cdot 10^{-3}}{1{,}0\cdot 10^3\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 5}}$ soit $\boxed{\delta = 0{,}25\text{ mm}}$.

f) $\delta = \sqrt{\dfrac{2\nu}{2\pi f}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 0{,}01}{2\cdot 3{,}14\cdot 5}}$ soit $\boxed{\delta = 25\text{ mm}}$. Cette valeur est minuscule par rapport aux distances à parcourir dans le noyau de la Terre (quelques milliers de kilomètres) : <u>une onde de cisaillement ne se propage pas dans la partie liquide du noyau terrestre</u>.
En revanche elle peut se propager dans la partie solide du noyau et dans le manteau, solide également ; et les ondes de compression se propagent dans les deux milieux. La connaissance de ces phénomènes, et l'analyse des différents types d'ondes reçues par des détecteurs d'ondes sismiques en différents points de la Terre, permettent de déterminer la structure du noyau terrestre.

¤ <u>Exercice 7</u>

a) Le sèche-cheveux fonctionnant en régime stationnaire, il y a conservation du débit massique : $\rho_\text{e} v_\text{e} S_\text{e} = \rho_\text{s} v_\text{s} S_\text{s}$.
On définit un système fermé à partir de la surface de contrôle Σ délimitée par le sèche-cheveux : à l'instant t, le système comporte la masse d'air dans Σ et la masse $D_m\,\mathrm{d}t = \rho_\text{e} v_\text{e} S_\text{e}\,\mathrm{d}t$ qui va entrer entre t et $t + \mathrm{d}t$; à l'instant $t + \mathrm{d}t$, il comporte la masse de fluide dans Σ et la même masse $\rho_\text{e} v_\text{e} S_\text{e}\,\mathrm{d}t$ qui est sortie entre t et $t + \mathrm{d}t$. Bilan d'énergie cinétique : $\dfrac{E_\text{c}(t+\mathrm{d}t) - E_\text{c}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_\text{pression} + \mathcal{P}_\text{int}$.

La puissance des forces intérieures est nulle si on suppose un écoulement parfait. La puissance des forces de pression existe sur les deux sections où la vitesse de l'air est colinéaire aux forces de pression : $\mathcal{P}_\text{pression} = +P_\text{e} S_\text{e} v_\text{e} - P_\text{s} S_\text{s} v_\text{s}$. Or $P_\text{e} = P_\text{s}$ car il s'agit de la pression atmosphérique dans les deux cas. Enfin, en l'absence de chauffage, et pour des vitesses faibles devant la célérité du son, on peut considérer $\rho_\text{e} = \rho_\text{s}$, d'où $v_\text{e} S_\text{e} = v_\text{s} S_\text{s}$. Finalement, $\mathcal{P}_\text{pression} = 0$.

Enfin $E_\text{c}(t) = E_{\text{c},\Sigma} + \dfrac{1}{2}(\rho_\text{e} v_\text{s} S_\text{s}\,\mathrm{d}t)v_\text{e}^2$ et $E_\text{c}(t+\mathrm{d}t) = E_{\text{c},\Sigma} + \dfrac{1}{2}(\rho_\text{e} v_\text{s} S_\text{s}\,\mathrm{d}t)v_\text{s}^2$. Le bilan donne donc : $\mathcal{P} = \dfrac{1}{2}\rho_\text{e} v_\text{s} S_\text{s}\left(v_\text{s}^2 - v_\text{e}^2\right)$.

Il reste à exprimer la vitesse d'entrée v_e : $v_\text{e} S_\text{e} = v_\text{s} S_\text{s}$ d'où $v_\text{e} = v_\text{s}\dfrac{S_\text{s}}{S_\text{e}}$. Finalement : $\boxed{\mathcal{P} = \dfrac{1}{2}\rho_\text{e} v_\text{s}^3 S_\text{s}\left(1 - \dfrac{S_\text{s}^2}{S_\text{e}^2}\right)}$. AN $\boxed{\mathcal{P} = 1{,}8\text{ W}}$.

Cette puissance semble assez faible pour un tel appareil usuel. En effet, l'essentiel de la puissance d'un sèche-cheveux commercial est en fait utilisé pour le chauffage, comme on va le voir.
b) Si la température de l'air augmente, sa masse volumique diminue. D'après l'équation du gaz parfait (modèle convenable à pression atmosphérique) : $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{nM}{V} = \dfrac{MP}{RT}$ d'où $\dfrac{\rho_\text{s}}{\rho_\text{e}} = \dfrac{T_\text{e}}{T_\text{s}}$. La conservation du débit massique donne alors $v_\text{e} = v_\text{s}\dfrac{\rho_\text{s} S_\text{s}}{\rho_\text{e} S_\text{e}} = v_\text{s}\dfrac{T_\text{e} S_\text{s}}{T_\text{s} S_\text{e}}$.
Par ailleurs, dans le bilan énergétique on doit tenir compte maintenant de la variation d'enthalpie, c'est-à-dire utiliser le premier principe industriel : $\rho_\text{s} v_\text{s} S_\text{s}(h_\text{s} - h_\text{e}) + \dfrac{1}{2}\rho_\text{s} v_\text{s} S_\text{s}\left(v_\text{s}^2 - v_\text{e}^2\right) = \mathcal{P}_\text{th} + \mathcal{P}_\text{méc} = \mathcal{P}_\text{tot}$.

Pour un gaz parfait diatomique, $h_\text{s} - h_\text{e} = c_P(T_\text{s} - T_\text{e}) = \dfrac{7}{2}\dfrac{R}{M}(T_\text{s} - T_\text{e})$. Donc $\boxed{\mathcal{P}_\text{tot} = \dfrac{\rho_\text{e} v_\text{s} S_\text{s} T_\text{e}}{2T_\text{s}}\left[\dfrac{7R}{M}(T_\text{s} - T_\text{e}) + v_\text{s}^2\left(1 - \dfrac{T_\text{e}^2 S_\text{s}^2}{T_\text{s}^2 S_\text{e}^2}\right)\right]}$.

AN $\boxed{\mathcal{P}_\text{tot} = 660\text{ W}}$. Cette fois l'ordre de grandeur correspond bien aux valeurs usuelles.