

Th1 – Corrigé des exercices 2 (fin), 3 et 4

□ Exercice 2 (fin)

a) *Traité en classe.*

b) $dV = -\chi_T V dP + \alpha V dT$ soit $\frac{dV}{V} = -\chi_T dP + \alpha dT$ (vu en classe).

c) À P constante, on intègre $\frac{dV}{V} = \alpha dT$: $\ln \frac{V_2}{V_1} = \alpha(T_2 - T_1)$ d'où $\frac{V_2}{V_1} = \exp[\alpha(T_2 - T_1)]$.

De même à T constante, on intègre $\frac{dV}{V} = -\chi_T dP$: $\ln \frac{V_2}{V_1} = -\chi_T(P_2 - P_1)$ d'où $\frac{V_2}{V_1} = \exp[-\chi_T(P_2 - P_1)]$.

Le volume du solide croît exponentiellement avec la température, et décroît exponentiellement avec la pression.

d) Pour un gaz parfait : $PV = nRT$ soit $V = \frac{nRT}{P}$. Donc $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \left(\frac{nRT}{P} \right)}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \frac{nR}{P}$ soit $\alpha = \frac{1}{T}$.

Et de même $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \left(\frac{nRT}{P} \right)}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(-\frac{nRT}{P^2} \right)$ soit $\chi_T = \frac{1}{P}$.

□ Exercice 3

a) On réécrit $S(U, V) = C_V \ln \left(U + \frac{n^2 a}{V} \right) + nR \ln(V - nb) + S_0 - C_V \ln \left(U_0 + \frac{n^2 a}{V_0} \right) - nR \ln(V_0 - nb)$ (les trois derniers termes sont des

constantes). Différentielle : $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U dV$ soit $dS = \frac{C_V}{U + \frac{n^2 a}{V}} dU + \left(\frac{-C_V \frac{n^2 a}{V^2}}{U + \frac{n^2 a}{V}} + \frac{nR}{V - nb} \right) dV$.

b) On identifie terme à terme avec $dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$.

$\frac{C_V}{U + \frac{n^2 a}{V}} = \frac{1}{T}$ d'où $U = C_V T - \frac{n^2 a}{V}$: l'énergie interne dépend non seulement de T , mais aussi de V .

Et $\frac{-C_V \frac{n^2 a}{V^2}}{U + \frac{n^2 a}{V}} + \frac{nR}{V - nb} = \frac{P}{T}$, soit en éliminant U : $-\frac{n^2 a}{V^2 T} + \frac{nR}{V - nb} = \frac{P}{T}$ que l'on met sous la forme classique $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$

(équation d'état de Van der Waals).

Par rapport au modèle du gaz parfait, on a donc ajouté deux corrections : le terme $\frac{n^2 a}{V^2}$ dans l'équation d'état, de même que $-\frac{n^2 a}{V}$ dans

l'énergie, correspond aux interactions attractives entre molécules (que l'on a négligées dans le modèle du gaz parfait) ; le terme nb dans l'équation d'état correspond au volume propre des molécules (lui aussi négligé dans le modèle du gaz parfait).

c) Appliquons le premier principe à la quantité n de gaz entre l'état initial et l'état final : $\Delta U + \Delta E_c = Q + W$. Or $\Delta E_c = 0$ (gaz immobile au début et à la fin), $Q = 0$ (le gaz est au contact de parois calorifugées et du vide) ; $W = 0$ (le gaz est en contact de parois rigides d'un côté, et rencontre le vide de l'autre côté, soit $P_{\text{ext}} = 0$). La détente de Joule & Gay-Lussac vérifie donc $\Delta U = 0$ (elle est isoénergétique). Ce raisonnement ne fait pas intervenir la nature du gaz (parfait ou non, nature chimique quelconque).

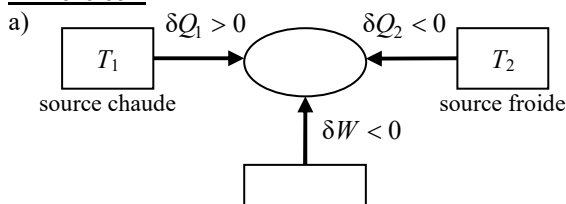
d) D'après la question b, cela équivaut à $C_V \Delta T - \frac{n^2 a}{2V_1} + \frac{n^2 a}{V_1} = 0$ d'où $\Delta T = -\frac{n^2 a}{2C_V V_1} = -\frac{na}{2C_{V,m} V_1}$. AN $\Delta T = -1,3 \text{ K}$.

$\Delta S = C_V \ln \left(U_2 + \frac{n^2 a}{2V_1} \right) + nR \ln(2V_1 - nb) - C_V \ln \left(U_1 + \frac{n^2 a}{V_1} \right) + nR \ln(V_1 - nb)$ soit $\Delta S = nC_{V,m} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + nR \ln \left(\frac{2V_1 - nb}{V_1 - nb} \right)$.

AN $\Delta S = +5,67 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. On trouve bien $\Delta S > 0$ car la détente est adiabatique et irréversible.

Pour un gaz parfait, U ne dépend que de T donc on trouverait $\Delta T = 0$; et $S = C_V \ln T + nR \ln V + \text{cte}$ donc $\Delta S = nR \ln 2 = +5,76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

□ Exercice 4



Premier principe sur un cycle : $\delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$ [1].

Second principe sur un cycle (réversible) : $\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0$ [2].

b) Lorsque le moteur fonctionne, la source chaude se refroidit progressivement (T_1 diminue) tandis que la source froide se réchauffe (T_2 augmente). Le moteur s'arrête lorsque les deux températures deviennent égales (valeur T_f) : en effet, on peut alors considérer qu'il n'y a plus qu'une seule source de chaleur, et un moteur monotherme ne peut pas exister (voir cours de PCSI).

Pour étudier l'évolution des températures des sources, on leur applique le premier principe. Pour la source chaude : $dU_1 = \delta Q_{\text{moteur} \rightarrow \text{source}}$ soit $C dT_1 = -\delta Q_1$. De même pour la source froide : $C dT_2 = -\delta Q_2$. On remplace alors δQ_1 et δQ_2 dans l'équation [2] : $-\frac{C dT_1}{T_1} - \frac{C dT_2}{T_2} = 0$ soit $\frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2}$. Enfin on intègre entre l'état initial et l'état final : $\int_{T_{1i}}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} = -\int_{T_{2i}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} \Leftrightarrow \ln \frac{T_f}{T_{1i}} = -\ln \frac{T_f}{T_{2i}} \Leftrightarrow \ln \frac{T_f^2}{T_{1i} T_{2i}} = 0 \Leftrightarrow \frac{T_f^2}{T_{1i} T_{2i}} = 1$ soit finalement $T_f = \sqrt{T_{1i} T_{2i}}$.

c) On intègre $\delta W = -\delta Q_1 - \delta Q_2 = C dT_1 + C dT_2$ entre l'état initial et l'arrêt du moteur : $W = C \int_{T_{1i}}^{T_f} dT_1 + C \int_{T_{2i}}^{T_f} dT_2 = C(2T_f - T_{1i} - T_{2i})$. En remplaçant T_f par sa valeur, on obtient $W = C(2\sqrt{T_{1i} T_{2i}} - T_{1i} - T_{2i})$ soit $W = -C(\sqrt{T_{1i}} - \sqrt{T_{2i}})^2$. On a bien trouvé $W < 0$.

d) Le rendement du moteur est défini par $\eta = \frac{-W}{Q_1}$. Or $Q_1 = -C \int_{T_{1i}}^{T_f} dT_1 = C(T_f - T_{1i})$ soit $Q_1 = C(\sqrt{T_{1i} T_{2i}} - T_{1i})$. On trouve donc :

$$\eta = -\frac{(\sqrt{T_{1i}} - \sqrt{T_{2i}})^2}{\sqrt{T_{1i} T_{2i}} - T_{1i}} = \frac{\sqrt{T_{1i}} - \sqrt{T_{2i}}}{\sqrt{T_{1i}}} \text{ soit } \eta = 1 - \sqrt{\frac{T_{2i}}{T_{1i}}}. \text{ AN } \eta = 13 \%$$

Si on avait maintenu les températures des sources à leur valeur initiale, on aurait obtenu le rendement de Carnot $\eta_C = 1 - \frac{T_{2i}}{T_{1i}}$. AN $\eta_C = 24 \%$. On peut vérifier comme attendu que $\eta < \eta_C$.