Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 1

¤ Premier problème

1. $C_P - C_V = nR$ (relation de Mayer) et $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$, d'où $\boxed{C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}}$ et $\boxed{C_P = \dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1}}$. De plus $P_0 V_A = nRT_0$, donc $\boxed{C_P = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{P_0 V_A}{T_0} = \gamma C_V}$.

2. La transformation 0-1 est <u>isochore</u> (volume V_A constant), et réversible (donc quasi statique) comme les autres.

3. PFD à l'équilibre pour le système {piston, masse} dans le référentiel terrestre galiléen : $\vec{P} + \vec{F}_{\text{p sup}} + \vec{F}_{\text{p inf}} = \vec{0}$. Projection sur $\vec{e_z}$: $-mg + P_1 S - P_0 S = 0$ d'où $\boxed{P_1 = P_0 + \dfrac{mg}{S}}$. De plus $P_1 V_A = nRT_1$ donc $T_1 = T_0 \dfrac{P_1}{P_0}$ soit $\boxed{T_1 = T_0\left(1 + \dfrac{mg}{P_0 S}\right)}$. AN $\boxed{P_1 = 1{,}1 \text{ bar}}$, $\boxed{T_1 = 330 \text{ K}}$.

4. Premier principe pour le gaz enfermé sur 0-1 : $U_1 - U_0 = W_0^1 + Q_0^1$ avec $W_0^1 = 0$ (isochore), d'où $\boxed{Q_0^1 = C_V(T_1 - T_0)}$, soit d'après la question **1**, $\boxed{Q_0^1 = \dfrac{P_0 V_A}{\gamma - 1}\left(\dfrac{T_1}{T_0} - 1\right)}$. AN $\boxed{Q_0^1 = 8{,}2 \text{ J}}$.

5. Le chauffage étant très lent (donc transformation <u>quasi statique</u>), le piston est toujours pratiquement à l'équilibre mécanique. D'après le raisonnement de la question **3**, la pression dans le gaz a donc toujours la même valeur P_1 : la transformation 1-2 est <u>isobare</u>.

6. $P_1 V_A = nRT_1$ et $P_1 V_B = nRT_2$, donc $\boxed{T_2 = T_1 \dfrac{V_B}{V_A}}$. AN $\boxed{T_2 = 1000 \text{ K}}$.

7. Sur une isobare : $H_2 - H_1 = Q_1^2$ soit $\boxed{Q_1^2 = C_P(T_2 - T_1)} = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{P_0 V_A}{T_0}(T_2 - T_1)$ soit $\boxed{Q_1^2 == \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{P_0 T_1}{T_0}(V_B - V_A)}$. AN $\boxed{Q_1^2 = 260 \text{ J}}$.

8. La transformation 2-3 est <u>isochore</u> (volume V_B constant), puis la transformation 3-0, comme la 1-2, est <u>isobare</u> (à la pression P_0). (Attention, la transformation 2-3 n'est pas isobare à P_1 : dans le PFD appliqué au piston, il faudrait ajouter ici la réaction des cales.)

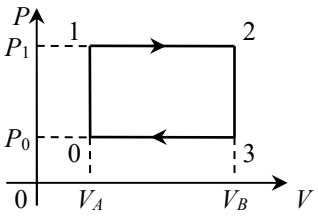
9. – Méthode 1 : on calcule les travaux sur chaque étape. Le travail est nul sur 0-1 et 2-3 (isochores). Sur les isobares : $W_1^2 = -\int P_1 \,\mathrm{d}V = -P_1(V_B - V_A)$ et de même $W_3^0 = -P_0(V_A - V_B)$. Total : $W = (P_1 - P_0)(V_A - V_B)$ soit $\boxed{W = \dfrac{mg}{S}(V_A - V_B)}$.

– Méthode 2 : on considère *avec qui* le travail est échangé. Sur 0-1 et 2-3, il n'y a aucun travail (car aucun mouvement). Sur 1-2 le gaz fait monter le piston et la masse *m*, puis sur 3-0 le piston seul redescend : le travail total *W* sur le cycle est donc celui fourni par le gaz à la masse *m* lors de la montée. Théorème de l'énergie cinétique pour *m* entre 1 et 2 : $\Delta E_c = W\left(\vec{P}\right) + (-W)$ soit $0 = mg(z_A - z_B) - W$ d'où $\boxed{W = mg\dfrac{V_A - V_B}{S}}$. AN $\boxed{W = -6{,}7 \text{ J}}$.

10. $\boxed{r = \left|\dfrac{W}{Q_0^1 + Q_1^2}\right|}$ puisque Q_0^1 et Q_1^2 sont les deux transferts thermiques effectivement fournis au gaz (positifs), lors du chauffage.

AN $\boxed{r = 0{,}025 \text{ (soit 2,5 \%)}}$. Ce rendement est <u>très faible</u>, comparé à celui des moteurs usuels : ici 97,5 % de la chaleur fournie part dans l'air environnant.

11. Les deux transformations isochores correspondant à des segments verticaux, et les deux isobares à des segments horizontaux.

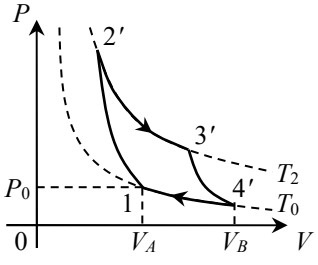


12. Le travail total est, en valeur absolue, l'aire du cycle : $|W| = (P_1 - P_0)(V_B - V_A) = \dfrac{mg}{S}(V_B - V_A)$.

De plus *W* est négatif, puisque c'est un moteur, donc $\boxed{W = \dfrac{mg}{S}(V_A - V_B)}$.

13. Les courbes isothermes ont une équation de la forme PV = cte (= nRT), les adiabatiques ont une équation de la forme PV^γ = cte (loi de Laplace).

14. Les seuls transferts thermiques ont lieu sur les deux isothermes 2′-3′ et sur 4′-1. Alors le premier principe pour le gaz s'écrit : $W + Q = \Delta U$ avec $\Delta U = 0$ (première loi de Joule), d'où $Q_{4'}^1 = -W_{4'}^1 = +\int P \,\mathrm{d}V = nRT_0 \int_{V_B}^{V_A} \dfrac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_0 \ln\dfrac{V_A}{V_B}$ soit $\boxed{Q_{4'}^1 = P_0 V_A \ln\dfrac{V_A}{V_B}}$. AN $\boxed{Q_{4'}^1 = -37 \text{ J}}$. De même $Q_{2'}^{3'} = -W_{2'}^{3'} = nRT_2 \ln\dfrac{V_3}{V_2} = P_0 V_A \dfrac{T_2}{T_0}\ln\dfrac{V_3}{V_2}$. De plus, la loi de Laplace sur 1-2′ et 3′-4′ s'écrit :



$T_0 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ et $T_0 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$. En divisant membre à membre il vient : $\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{V_2}{V_3}$, d'où $\boxed{Q_{2'}^{3'} = P_0 V_A \dfrac{T_2}{T_0}\ln\dfrac{V_B}{V_A}}$. AN $\boxed{Q_{2'}^{3'} = +122 \text{ J}}$.

15. Premier principe sur un cycle : $W' + Q_{4'}^1 + Q_{2'}^{3'} = \Delta U = 0$ d'où $\boxed{W' = -Q_{2'}^{3'} - Q_{4'}^1 = P_0 V_A \ln\dfrac{V_B}{V_A}\left(1 - \dfrac{T_2}{T_0}\right)}$. AN $\boxed{W' = -85 \text{ J}}$.

16. $\boxed{r' = \left|\dfrac{W'}{Q_{2'}^{3'}}\right| = 1 - \dfrac{T_0}{T_2}}$. AN $\boxed{r' = 0{,}70 \text{ (soit 70 \%)}}$. Ce rendement est <u>beaucoup plus élevé que le précédent</u>, utilisant les deux mêmes sources de chaleur (c'est pourquoi le premier était qualifié de « peu performant »).

¤ Deuxième problème

0. h étant l'enthalpie massique et D le débit massique : $\boxed{\Delta h = w_u + q}$; $\boxed{D\,\Delta h = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}}$ (si on néglige les variations d'énergie cinétique).

1. Pour un gaz diatomique comme le diazote, dans les conditions usuelles : $C_v = \frac{5}{2}nR$ et $C_p = \frac{7}{2}nR$ donc $\boxed{\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4}$.

Pour chaque compresseur adiabatique réversible, on peut appliquer la loi de Laplace : $T_{\text{sortie}}^{\gamma} p_{\text{sortie}}^{1-\gamma} = T_E^{\gamma} p_{\text{entrée}}^{1-\gamma} \Leftrightarrow T_{\text{sortie}} = T_E\, r^{(\gamma-1)/\gamma}$. Or $r^N = \frac{p_A}{p_E} = 100$. La condition $T_{\text{sortie}} < T_{\max}$ équivaut donc à $T_E \left(\frac{p_A}{p_E}\right)^{(\gamma-1)/\gamma N} < T_{\max} \Leftrightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma N} \ln\frac{p_A}{p_E} < \ln\frac{T_{\max}}{T_E} \Leftrightarrow \boxed{N > \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\ln(p_A/p_E)}{\ln(T_{\max}/T_E)}}$.

AN $N > 4{,}6$ donc $\boxed{N_{\min} = 5}$.

2. Dans le cas réversible, $S = C_p \ln T - nR \ln p = \text{cte}$. L'irréversibilité entraîne une augmentation de S, donc pour une même augmentation de T (si on veut toujours limiter la température à $T_{\max}$), on a une moindre augmentation de la pression (r diminue). Si on veut garder un rapport global $r^N = p_A/p_E$ constant, il faut donc augmenter N.

3. Dans le réfrigérant il n'y a pas de travail utile (pas de pièces mobiles). Premier principe pour l'écoulement d'eau : $D_{\text{eau}} c_e (T_{\text{sortie eau}} - T_e) = \mathcal{P}_{\text{th (eau)}}$. Pour le diazote : $D c_p (T_E - T_{\text{sortie }(C)}) = \mathcal{P}_{\text{th (diazote)}}$ avec $T_{\text{sortie }(C)} = T_E\, r^{(\gamma-1)/\gamma} = T_E\,(p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N}$ et $\mathcal{P}_{\text{th (diazote)}} = -\mathcal{P}_{\text{th (eau)}}$. Donc $D_{\text{eau}} c_e (T_{\text{sortie eau}} - T_e) = -D c_p (T_E - T_{\text{sortie }(C)}) \Leftrightarrow \frac{D_{\text{eau}}}{D} = \frac{\gamma R T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)}{(\gamma-1) M c_e (T_{\text{sortie eau}} - T_e)}$. Pour respecter la contrainte $T_{\text{sortie eau}} < T'_{\max}$, il faut donc : $\boxed{\frac{D_{\text{eau}}}{D} > \frac{\gamma R T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)}{(\gamma-1) M c_e (T'_{\max} - T_e)}}$. AN $\boxed{\frac{D_{\text{eau}}}{D} > 0{,}32}$.

4. Sur la courbe $\mathcal{C}_1$ la température T est conservée (courbe isotherme). À basse pression on tend vers le modèle du gaz parfait : alors l'enthalpie massique ne dépend que de la température (deuxième loi de Joule), d'où une asymptote verticale.

5. Sur la courbe $\mathcal{C}_2$ l'entropie massique s est conservée (courbe isentropique). D'après l'expression $s = c_p \ln T - r \ln p = \text{cte}$, lorsque p augmente, T augmente donc h augmente aussi : cette courbe a donc une pente positive dans le diagramme.

6. Sur la courbe de saturation $\mathcal{C}_3$, le diazote est sous forme liquide à gauche du point O (courbe d'ébullition) et sous forme gazeuse à droite du point O (courbe de rosée). Au point O la distinction entre liquide et gaz disparaît (un unique état fluide).

7. Sur la courbe $\mathcal{C}_4$ le titre massique en liquide x est conservé (courbe isotitre). En M, on a un état diphasé avec $x = 0{,}1$ soit 10 % en masse de liquide et 90 % de gaz, à la pression $p = 0{,}6$ bar et à la température $T = -200$ °C.

8. Les fractions étant x pour le liquide et $1-x$ pour le gaz : $\boxed{h_C = x h_{\text{liq}} + (1-x) h_{\text{vap}}}$.

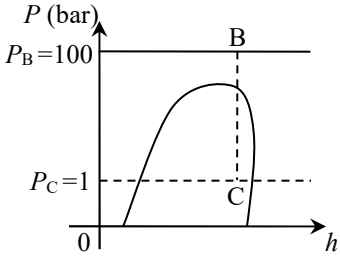
9. En régime permanent, la fraction x est constante, donc les deux phases sont dans les mêmes proportions à l'entrée et à la sortie. Le débit de liquide sortant est donc $\boxed{D_m = x D}$, et le débit de gaz sortant est de même $\boxed{D' = (1-x) D}$.

10. Dans (E) on applique le premier principe pour les deux écoulements (sans travail utile) : $D'(h_E - h_D) = \mathcal{P}_{\text{th (flux DE)}}$ et $D(h_B - h_A) = \mathcal{P}_{\text{th (flux AB)}}$ avec $\mathcal{P}_{\text{th (flux AB)}} = -\mathcal{P}_{\text{th (flux DE)}}$, $h_B = h_C$ (vanne (V) isenthalpique) et $h_D = h_{\text{vap}}$ (puisqu'on récupère seulement la vapeur au point D). Donc $(1-x) D (h_E - h_D) = -D(h_C - h_A) \Leftrightarrow (1-x)(h_E - h_{\text{vap}}) = -(x h_{\text{liq}} + (1-x) h_{\text{vap}} - h_A) \Leftrightarrow (1-x) h_E = -x h_{\text{liq}} + h_A$ d'où finalement $\boxed{x = \frac{h_E - h_A}{h_E - h_{\text{liq}}}}$.

11. On lit pour A (vapeur à 100 bar et 27 °C) : $\boxed{h_A = 495 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$; pour E (vapeur à 1 bar et 27 °C) : $\boxed{h_E = 515 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$; pour le liquide saturant à 1 bar et –196 °C : $\boxed{h_{\text{liq}} = 82 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$; pour la vapeur saturante à 1 bar et –196 °C : $\boxed{h_{\text{vap}} = 283 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$.

On en déduit $\boxed{x = 0{,}046 \text{ (ou } 4{,}6\ \%)}$. Dans l'hypothèse du gaz parfait, on aurait $h_E - h_A = c_p (T_E - T_A) = 0$ donc $\boxed{x = 0}$.

12.



L'isobare 100 bar passe au-dessus de la courbe de saturation, cette pression étant nettement supérieure à celle du point critique : le diazote se trouve en B à l'état de fluide supercritique. Pour lire la température en B, on place ce point à la verticale de C ($h_B = h_C$ car la vanne (V) est isenthalpique), le point C étant lui-même placé sur l'isobare 1 bar avec $x = 0{,}046$. On trouve en lisant les isothermes : $\boxed{T_B = -116 \text{ °C}}$.

13. Premier principe pour le fluide dans chaque compresseur adiabatique : $D\,\Delta h = \mathcal{P}_u$ soit $\mathcal{P}_u = D c_p T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)$. La puissance totale des N compresseurs est donc $\boxed{\mathcal{P}_{u\,(\text{tot})} = N \frac{D_m}{x} \frac{\gamma R T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)}{(\gamma-1) M}}$. AN $\boxed{\mathcal{P}_{u\,(\text{tot})} = 306 \text{ kW}}$.

Dans le texte cité, le débit volumique est $D'_v = 1 \text{ L}\cdot\text{h}^{-1} = 2{,}8\cdot10^{-7} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, donc en évaluant le volume massique du diazote liquide à $v = 0{,}0016 \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$ (par comparaison avec l'eau à 18 g·mol^{-1}, et le diazote liquide étant à gauche de l'isochore $0{,}005 \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$), on obtient $D'_m = \frac{D'_v}{v} = 1{,}8\cdot10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Le rapport des débits des deux machines est $\frac{D_m}{D'_m} = 170$ pour un rapport de puissances $\frac{\mathcal{P}_{u\,(\text{tot})}}{\mathcal{P}'_{u\,(\text{tot})}} = 140$: les performances sont similaires.