

Th2 – Corrigé des exercices 1 (fin), 2, 3 et 4

□ Exercice 1 (fin)

ab) On a établi : $\frac{\partial n^*}{\partial t}(x,t) = +D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}(x,t) + \frac{K-1}{\tau} n^*(x,t)$ puis en régime stationnaire : $n^*(x) = B \sin\left(\sqrt{\frac{K-1}{D\tau}} x\right)$.

Deuxième condition aux limites : $n^*(L) = 0 = B \sin\left(\sqrt{\frac{K-1}{D\tau}} L\right)$. Ce zéro est forcément le premier zéro non nul de la fonction sinus,

car la concentration ne peut pas devenir négative, donc $\sqrt{\frac{K-1}{D\tau}} L = \pi$ d'où $L = \pi \sqrt{\frac{D\tau}{K-1}}$. C'est la seule longueur de barreau

permettant d'avoir un régime stationnaire. Si L est plus petite, on peut montrer que la concentration décroît nécessairement jusqu'à zéro. Si L est plus grande, la concentration croît nécessairement en tendant vers l'infini, mais en pratique cela s'arrête avec la destruction du barreau : c'est le principe d'une bombe nucléaire !

□ Exercice 2

(Voir le cours pour les trois premières questions)

a) Le bilan donne $\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j_n}{\partial x}$, d'où en injectant la loi de Fick $j_n = -D \frac{\partial c}{\partial x}$: $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$.

b) En ordres de grandeur : $T = \frac{L^2}{D}$.

c) En régime stationnaire on établit : $c(x) = \frac{c_2 - c_1}{L} x + c_1 = -\frac{\Delta c}{L} x + c_1$ d'où $j_n = D \frac{\Delta c}{L}$ (indépendant de x).

d) Bilan de quantité de matière pour le récipient 1 entre les instants t et $t + dt$: $n_1(t+dt) - n_1(t) = -\delta n_{\text{sortant de 1}}$

$\Leftrightarrow [c_1(t+dt) - c_1(t)] V_1 = -j_n S dt = -D \frac{\Delta c(t)}{L} S dt$ d'où $\frac{dc_1(t)}{dt} = -D \frac{\Delta c(t)}{LV_1} S$. Il y a deux fonctions différentes dans l'équation, il

nous faut une autre équation. On fait de même un bilan pour le récipient 2 : $n_2(t+dt) - n_2(t) = +\delta n_{\text{entrant dans 2}}$ d'où

$\frac{dc_2(t)}{dt} = +D \frac{\Delta c(t)}{LV_2} S$. Finalement on soustrait membre à membre :

$\frac{dc_1(t)}{dt} - \frac{dc_2(t)}{dt} = -D \frac{\Delta c(t)}{LV_1} S - D \frac{\Delta c(t)}{LV_2} S$ soit $\frac{d\Delta c(t)}{dt} + \frac{DS}{L} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \Delta c(t) = 0$ (linéaire d'ordre 1, sans second membre).

e) Solution : $\Delta c(t) = \Delta c(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\frac{1}{\tau} = \frac{DS}{L} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)$ soit $\tau = \frac{L}{DS} \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}$. Comme on peut le prévoir qualitativement,

l'écart de concentration tend vers zéro : la concentration s'homogénéise entre les deux récipients.

□ Exercice 3

a) Loi de Fick : $\vec{j}_N(M,t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^*(r,t) = -D \frac{\partial n^*}{\partial r} \vec{e}_r$ soit $j_{N,r}(r,t) = -D \frac{\partial n^*}{\partial r}$.

b) Bilan du nombre de molécules d'eau sur une coquille cylindrique de hauteur h comprise entre r et $r + dr$ (donc de volume $d\tau = 2\pi r h dr$) :

$dN(t+dt) - dN(t) = +\delta N_{\text{entrant en } r} - \delta N_{\text{sortant en } r+dr}$

soit $[n^*(r,t+dt) - n^*(r,t)] d\tau = \left(+ \iint_{S_r} j_{N,r}(r,t) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r ds - \iint_{S_{r+dr}} j_{N,r}(r+dr,t) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r ds \right) dt$

$[n^*(r,t+dt) - n^*(r,t)] 2\pi r h dr = (+j_{N,r}(r,t) 2\pi h r - j_{N,r}(r+dr,t) 2\pi h (r+dr)) dt$.

En divisant par $2\pi h dr dt$ on obtient : $\frac{n^*(r,t+dt) - n^*(r,t)}{dt} r = \frac{+r j_{N,r}(r,t) - (r+dr) j_{N,r}(r+dr,t)}{dr}$ soit $\frac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial [r j_{N,r}(r,t)]}{\partial r}$.

c) On injecte $j_{N,r}$, d'où : $\frac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} = +\frac{D}{r} \frac{\partial [r \frac{\partial n^*}{\partial r}]}{\partial r}$.

d) En régime stationnaire : $\frac{\partial n^*}{\partial t} = 0$ d'où $\frac{D}{r} \frac{d[r \frac{dn^*}{dr}]}{dr} = 0$, ce qui donne $\frac{d[r \frac{dn^*}{dr}]}{dr} = 0$ puisque $D \neq 0$.

On intègre une fois par rapport à r : $r \frac{dn^*}{dr} = A = \text{cte}$, d'où $\frac{dn^*}{dr} = \frac{A}{r}$. On intègre une deuxième fois : $n^*(r) = A \ln r + B$.

Or la concentration ne peut pas diverger en $r = 0$ (sur l'axe du cylindre), donc nécessairement $A = 0$. Il reste $n^*(r) = B = \text{cte}$.

Si on arrête de cuire un peu avant, la concentration est encore hétérogène, forcément moins grande sur l'axe (puisque la diffusion provient de l'extérieur) ; ainsi le spaghetti est plus moelleux à la surface et plus dur au milieu.

e) On utilise la relation en ordre de grandeur $D \sim \frac{\ell^2}{\tau}$ avec $\ell \sim 1 \text{ mm}$ (rayon) et $\tau \sim 12 \text{ min} = 10^3 \text{ s}$ d'où $D \sim 1 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

C'est un ordre de grandeur réaliste pour la diffusion dans un solide poreux, à température assez élevée.

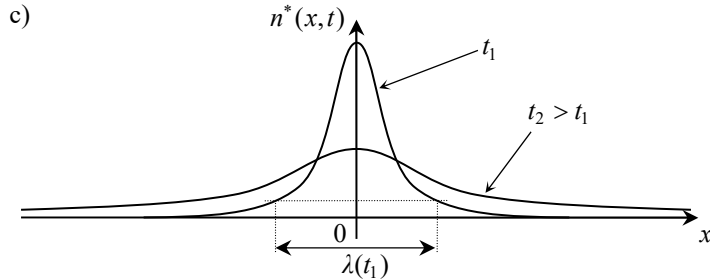
□ Exercice 4

a) Équation de diffusion en l'absence de création/consommation : $\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}$.

b) On trouve bien pour les limites : $n^*(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \forall x \neq 0$, $n^*(0, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$ et $n^*(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \forall t$.

Dérivons cette fonction : $\frac{\partial n^*}{\partial t} = -\frac{A}{2t^{3/2}\sqrt{D}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) + \frac{A}{\sqrt{Dt}} \frac{x^2}{4Dt^2} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$; $\frac{\partial n^*}{\partial x} = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \frac{2x}{4Dt} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$

puis $\frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \frac{2}{4Dt} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) + \frac{A}{\sqrt{Dt}} \left(\frac{2x}{4Dt}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$. On vérifie donc bien l'équation de diffusion.



La fonction est de plus en plus « étalée », avec un maximum central de moins en moins élevé. L'aire sous la courbe reste constante, car elle est proportionnelle au nombre total de particules (voir question suivante).

d) Population totale :

$$N = \iiint_{\text{feuille}} n^*(x, t) dx dy dz = \frac{A}{\sqrt{Dt}} \int_0^l dy \int_0^e dz \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx = 2leA \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \frac{dx}{2\sqrt{Dt}} = 2leA \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = 2leA\sqrt{\pi}$$

donc $A = \frac{N}{2le\sqrt{\pi}}$.

e) $n^*\left(\frac{\lambda(t)}{2}, t\right) = \frac{n^*(0, t)}{10} \Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{\lambda(t)^2}{16Dt}\right) = \frac{A}{10\sqrt{Dt}} \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{\lambda(t)^2}{16Dt}\right) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \lambda(t) = 4\sqrt{Dt \ln 10}$. Comme on l'attendait, la largeur de la tache augmente proportionnellement à la racine carrée de la durée (et à celle du coefficient de diffusion).