

Devoir test de physique n° 1

Cet énoncé comporte trois problèmes. Durée : 4 heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Problème 1 **Modélisation d'une machine frigorifique**

Les parties rayées ne seront pas traitées ici : ce sont des questions faisant partie du sujet de concours original, mais n'entrant pas dans le cadre du programme de ce devoir.

Présentation générale

Un des enjeux majeurs de la grande distribution, de l'industrie et du tertiaire dans les années à venir sera de diviser sa consommation d'énergie de moitié. La production frigorifique d'un magasin représente entre 40 et 60 % de la consommation électrique (selon la superficie). La **figure 1** montre une implantation. La production de froid doit être efficace malgré toutes les perturbations d'ouverture et de fermeture des portes des congélateurs.

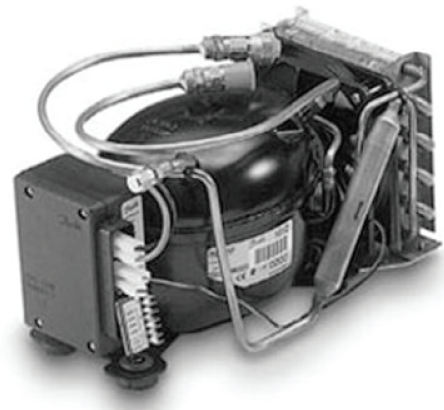


Figure 1 – Photographies d'un magasin de produits surgelés et d'un compresseur

Aujourd'hui, de nouveaux types de machines permettent d'adapter la puissance du compresseur aux besoins de l'installation frigorifique en effectuant un réglage en continu de la vitesse du compresseur. Ce type d'installation permet de gagner jusqu'à 25 % de consommation d'énergie. Le sujet porte sur la modélisation et la justification des modèles de ces nouvelles machines.

Le sujet comporte 4 parties indépendantes avec pour objectif de :

- comprendre un modèle simple du cycle frigorifique et de pointer les paramètres affectant l'efficacité thermodynamique de la machine. Le contrôle en vitesse du compresseur permet de commander la puissance thermique soutirée à la source froide (nommée « puissance frigorifique ») ;
- trouver les fréquences propres de vibration du compresseur afin d'éviter de se placer à une vitesse critique lors de la variation de vitesse. En effet, une vibration trop grande engendrerait du bruit désagréable pour les clients ;
- mettre en évidence expérimentalement les inconvénients d'une utilisation du compresseur sans dispositif de commande de la vitesse de rotation (pic de courant au démarrage et ses conséquences éventuelles, facteur de puissance dépendant de la charge) ;
- modéliser et justifier la commande prédictive de l'asservissement en température. La commande prédictive est comparée à la commande Proportionnelle Intégrale qui s'avère moins performante pour ce type d'utilisation.

Remarque : dans l'énoncé du sujet, une égalité notée $\stackrel{\text{def}}{=}$ représente une définition.

I - Modélisation du cycle frigorifique

L'objectif de cette partie est de s'approprier un modèle thermodynamique simple du fonctionnement de la machine et de pointer les facteurs affectant son efficacité.

La machine frigorifique est constituée de quatre organes, représentés sur la **figure 2**.

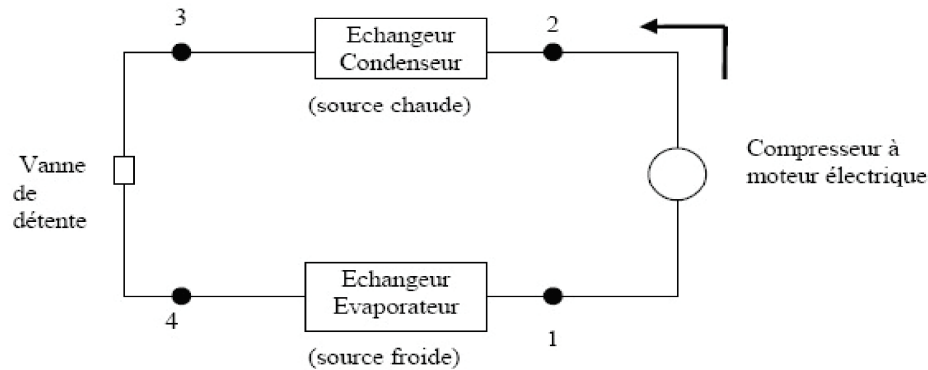


Figure 2 – Les quatre organes de la machine frigorifique

Le fluide frigorigène circulant entre les différents organes est le 1,1,1,2-Tétrafluoroéthane, noté « R134a » par la suite.

La **figure 3** (page suivante) représente en coordonnées (pression P , enthalpie massique h), les transformations subies par ce fluide au cours d'un cycle :

- 1 → 2 : compression isentropique du fluide par le compresseur ;
- 2 → 3 : échange thermique isobare à haute pression P_{hp} dans le condenseur ;
- 3 → 4 : détente adiabatique dans le détendeur ;
- 4 → 1 : échange thermique isobare à basse pression P_{bp} dans l'évaporateur.

En plus du cycle, d'autres courbes apparaissent sur le diagramme :

- la courbe de saturation liquide-vapeur (courbe noire en forme de cloche) ;
- un réseau d'isothermes (courbes en trait plein, tracées à $T = C^{te}$) ;
- un réseau d'isentropiques (courbes en pointillés, tracées à entropie massiques $s = C^{te}$) ;
- un réseau d'iso-titres en vapeur à l'intérieur de la courbe de saturation (courbes en pointillés tracées à l'intérieur de la courbe de saturation, à titre en vapeur $x = C^{te}$).

À l'intérieur de la courbe de saturation, le fluide est diphasé liquide-vapeur. À gauche de la courbe de saturation, le fluide est liquide. À droite, le fluide est gazeux.

Remarque : seul le début des courbes isothermes est représenté dans les domaines situés à gauche et à l'intérieur de la courbe de saturation. Cela permet d'alléger le diagramme, les isothermes étant horizontales à l'intérieur de la courbe de saturation et verticales à sa gauche.

Document - Quelques propriétés du fluide R134a

- Masse volumique aux différents points du cycle (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) :

$$\mu_1 = 4,2 \quad \mu_2 = 45,5 \quad \mu_3 = 1,3 \cdot 10^3 \quad \mu_4 = 12,5$$

- Ordre de grandeur de capacités thermiques massiques du R134a : $c_v \sim c_p \sim 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
(ordres de grandeur valables pour la phase liquide et pour la phase vapeur)

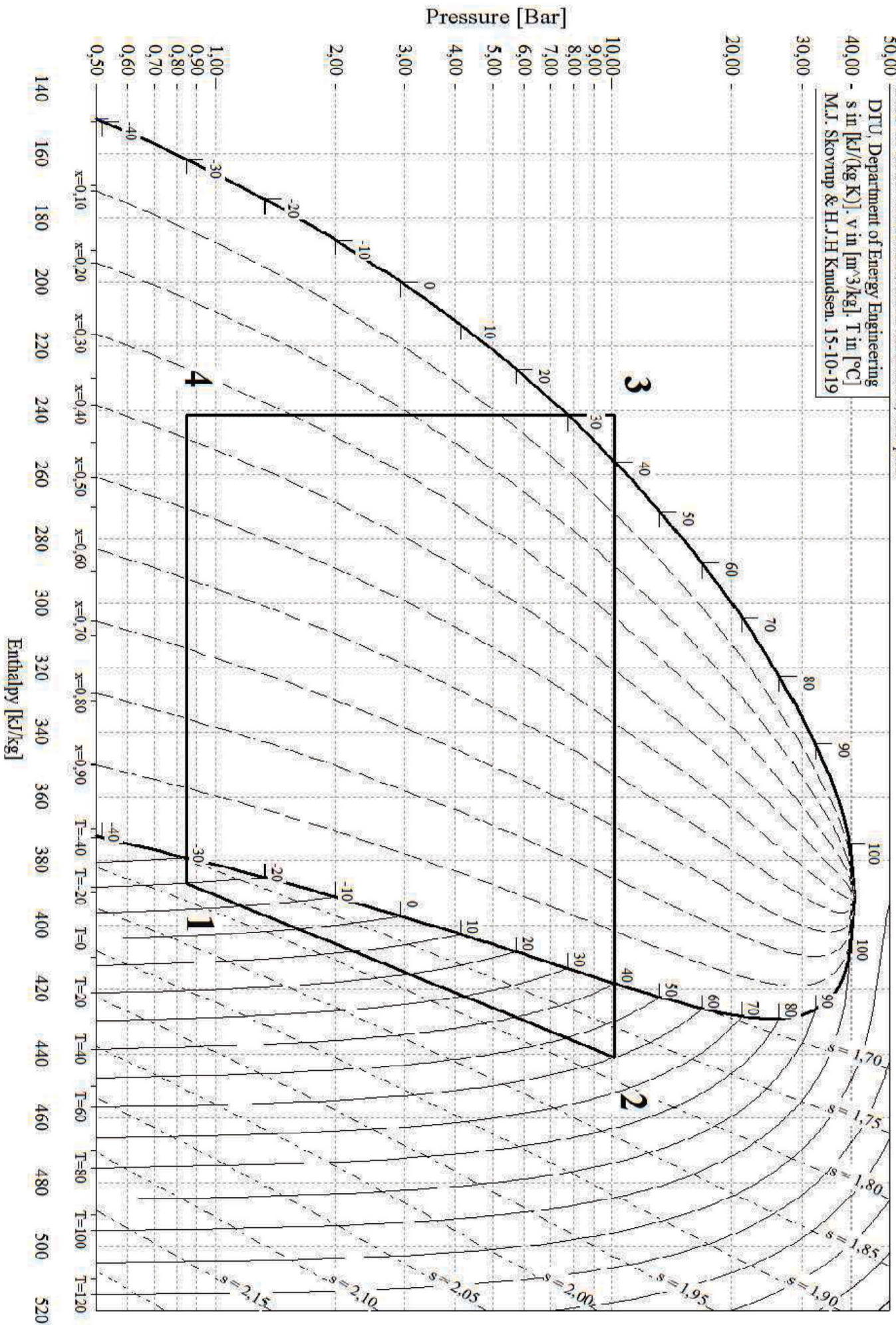


Figure 3 – Cycle subi par le fluide R134a, en coordonnées Pression – Enthalpie massique (tracé avec le logiciel CoolPack)

On rappelle l'expression du premier principe de la thermodynamique en écoulement stationnaire appliqué à un système ouvert

$$\Delta \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) = w + q \quad (1)$$

- $\Delta h \stackrel{\text{def}}{=} h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}}$ est la variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie ;
- $\Delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$ est la variation d'énergie cinétique massique du fluide entre l'entrée et la sortie ;
- $\Delta(gz)$ est la variation d'énergie potentielle massique de pesanteur entre l'entrée et la sortie ;
- w est le travail massique utile, apporté au fluide par toute pièce mobile en contact avec lui ;
- q est le transfert thermique massique reçu par le fluide.

On rappelle aussi l'expression du deuxième principe de la thermodynamique en écoulement stationnaire

$$\Delta s = s_e + s_c \quad (2)$$

- $\Delta s \stackrel{\text{def}}{=} s_{\text{sortie}} - s_{\text{entrée}}$ est la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie ;
- s_e est l'entropie massique échangée et s_c est l'entropie massique créée.

On rappelle enfin la définition du titre en vapeur d'un corps diphasé liquide-vapeur $x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{liq}} + m_{\text{vap}}}$.

Notations : les grandeurs associées à l'état 1 du cycle sont indicées "1". Les quantités échangées entre le fluide et l'extérieur au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$ sont indicées par "12".

Exemples : enthalpie massique h_1 et travail massique utile w_{12} .

On peut en déduire les autres notations.

I.1 - Questions préalables sur le principe de fonctionnement d'une machine frigorifique

Le principe d'une machine frigorifique ditherme est le suivant : « Un fluide frigorigène circule entre les différents organes de la machine. Mis en mouvement par le compresseur, ce fluide refroidit la source froide et réchauffe la source chaude. »

Q1. Donner et justifier les signes des quantités algébriques suivantes : w_{12} , q_{23} et q_{41} .

Q2. Lors de la traversée du condenseur, le fluide frigorigène a-t-il une température supérieure ou inférieure à celle de la source chaude ? Lors de la traversée de l'évaporateur, le fluide a-t-il une température supérieure ou inférieure à celle de la source froide ?

Q3. Si l'on considère le réfrigérateur que l'on possède à la maison, où se situe la source froide ? Et la source chaude ?

I.2 - Questions préalables sur l'expression utile du premier principe

Q4. On considère une section de l'écoulement. En supposant les champs uniformes sur cette section, exprimer le débit de masse en fonction notamment de la vitesse d'écoulement.

Réponse : $D_m = \mu S v$ avec μ la masse volumique, S la section et v la vitesse d'écoulement.

Q5. D'après les données, on remarque que la masse volumique du fluide est minimale juste avant compression (état 1). En admettant que la section des canalisations est approximativement uniforme au cours du cycle, en déduire qu'en régime permanent la vitesse du fluide est maximale juste avant compression (état 1).

- Q6.** La vitesse maximale au cours du cycle est de l'ordre de 1 m.s^{-1} . En prenant comme référence la variation d'enthalpie massique au cours de la compression, en déduire que les variations d'énergie cinétique peuvent être négligées dans l'expression du premier principe de la thermodynamique.
- Q7.** De la même façon, justifier que le terme (gz) peut aussi être retiré de l'expression du premier principe de la thermodynamique.

On utilisera par la suite l'expression simplifiée suivante du 1^{er} principe en écoulement stationnaire :

$$\Delta h = w + q . \quad (3)$$

I.3 - Lecture du diagramme et intérêt de la vaporisation

Pour ne pas dégrader le compresseur, il est crucial que le fluide caloporteur soit purement gazeux à l'entrée de cet organe, toute goutte de liquide entraînant son usure prématurée. C'est pourquoi le fluide à la sortie de l'évaporateur est « *surchauffé* » : sa température T_1 dans l'état 1 est supérieure à celle de la vapeur saturante $T_{\text{sat}}(P_{\text{bp}})$. La surchauffe est une marge de sécurité qui permet de garantir que le fluide sera bien gazeux à l'entrée du compresseur, même si le fonctionnement de la machine est perturbé.

- Q8.** Déterminer graphiquement la valeur numérique de la *surchauffe* : $T_1 - T_{\text{sat}}(P_{\text{bp}})$.
- Q9.** Le fluide à la sortie du condenseur (état 3) est dit « sous-refroidi » : sa température de sortie T_3 est plus basse que la température de vapeur saturante $T_{\text{sat}}(P_{\text{hp}})$. Déterminer graphiquement la valeur numérique du *sous-refroidissement* : $T_3 - T_{\text{sat}}(P_{\text{hp}})$.
- Q10.** La transformation $3 \rightarrow 4$ est une détente de Joule-Thomson. Le détendeur peut être assimilé à un simple étranglement local de la conduite. Il n'y a pas de pièce mobile et les parois sont calorifugées. Justifier que cette étape est isenthalpique.

L'enthalpie massique d'un corps pur est définie par :

$$h \stackrel{\text{def}}{=} u(T) + \frac{P}{\mu}$$

où $u(T)$ est l'énergie interne massique, supposée indépendante de la pression.

- Q11.** Dans la zone située à gauche de la courbe de saturation, les isothermes sont verticales, donc confondues avec les isenthalpiques. Le R134a étant liquide dans cette zone, cela correspond à l'approximation usuelle stipulant que $\Delta h \cong c_p \Delta T$ pour une phase condensée. On souhaite ici vérifier la validité de cette approximation sur la première phase de la détente du R134a, avant vaporisation (du point 3 jusqu'à la courbe de saturation). Déterminer numériquement la variation de température sur cette première phase et vérifier qu'une isenthalpique est effectivement assimilable à une isotherme.

- Q12.** La suite de la détente provoque une vaporisation du R134a.

Etablir qu'au cours de cette vaporisation, la variation d'enthalpie massique peut s'écrire :

$$\Delta h = L_{\text{vap}}(T_4) \Delta x_{\text{vap}} + c_p(T_4 - T_3) \quad (4)$$

$L_{\text{vap}}(T_4) \stackrel{\text{def}}{=} h_{\text{vap}}(T_4) - h_{\text{liq}}(T_4)$ étant la chaleur latente de vaporisation à la température T_4 et Δx_{vap} étant la variation du titre en vapeur au cours de la vaporisation. On justifiera clairement la démarche utilisée.

Q13. Mesurer graphiquement $L_{\text{vap}}(T_4)$. En déduire par le calcul une valeur numérique de la variation de température ($T_4 - T_3$) attendue lors de la transformation $3 \rightarrow 4$. Cette valeur est-elle du même ordre de grandeur que celle lue sur le diagramme ?

Conclusion : la vaporisation, provoquée mécaniquement, génère une chute de température du fluide frigorigène permettant d'orienter le transfert thermique dans le sens souhaité lors de son passage dans l'évaporateur : de la source froide vers le fluide.

I.4 - Hypothèses simplificatrices et efficacité de la machine

Q14. Quel phénomène faut-il négliger pour modéliser les échanges thermiques considérés comme étant isobares ?

Q15. Quelles hypothèses faut-il faire pour modéliser la compression comme étant isentropique ?

On rappelle la définition qualitative de l'efficacité d'une machine thermique :

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\text{énergie massique utile}}{\text{énergie massique coûteuse}} \right|.$$

Q16. À quoi correspondent ces deux termes énergétiques dans le cas de la machine frigorifique et identifier dans le cycle la transformation associée à chacun. Déterminer leur valeur numérique par lecture graphique sur le diagramme (P, h). En déduire la valeur de l'efficacité.

Q17. En appliquant à 1 kg de fluide frigorigène les deux principes de la thermodynamique sur un cycle réversible, établir l'expression de l'efficacité de Carnot en fonction des températures de la source froide et de la source chaude ($T_{\text{chaud}} = 20^\circ\text{C}$ et $T_{\text{froid}} = -15^\circ\text{C}$). Faire l'application numérique et comparer cette valeur à l'efficacité calculée dans le cadre du modèle étudié. Le résultat de cette comparaison était-il prévisible ? Quelles sont les sources d'irréversibilité du cycle avec lequel a été modélisée la machine frigorifique ?

Q18. Aucune transformation réelle n'est réversible. La compression réelle qui amène le fluide de P_{bp} à P_{hp} est nécessairement irréversible, contrairement à l'hypothèse simplificatrice de notre modèle. Proposer une modification simple de l'allure de la courbe $1 \rightarrow 2$ du diagramme (P, h) pour tenir compte de l'irréversibilité. En déduire graphiquement une conséquence sur l'efficacité. (L'explication sera faite sur la copie.)

Q19. Expliquer en quoi le sous-refroidissement permet d'augmenter l'efficacité de la machine, tous les autres paramètres étant gardés identiques.

Problème 2 **Autocuiseur**

L'autocuiseur (**photo 1**), couramment appelé "cocotte-minute®", a été inventé en 1679 par le français Denis Papin.

Il s'agit d'un dispositif de cuisson des aliments sous une pression supérieure à la pression atmosphérique. L'augmentation de pression s'accompagne d'une augmentation de la température maximale atteinte, ce qui accélère la cuisson des aliments.

Une soupape permet de limiter la pression intérieure en évacuant la vapeur d'eau formée et assure une cuisson à température constante.



L'autocuiseur contient toujours un peu d'eau en plus des aliments à cuire. La cuisson se déroule alors en trois étapes :

- un régime transitoire de montée en pression (et en température) du contenu de l'autocuiseur ;
- un régime de cuisson durant lequel la pression et la température de la vapeur d'eau restent constantes (la vapeur qui s'échappe par la soupape est compensée par la vaporisation de l'eau contenue dans l'autocuiseur) ;
- une décompression, souvent rapide, pour arrêter la cuisson.

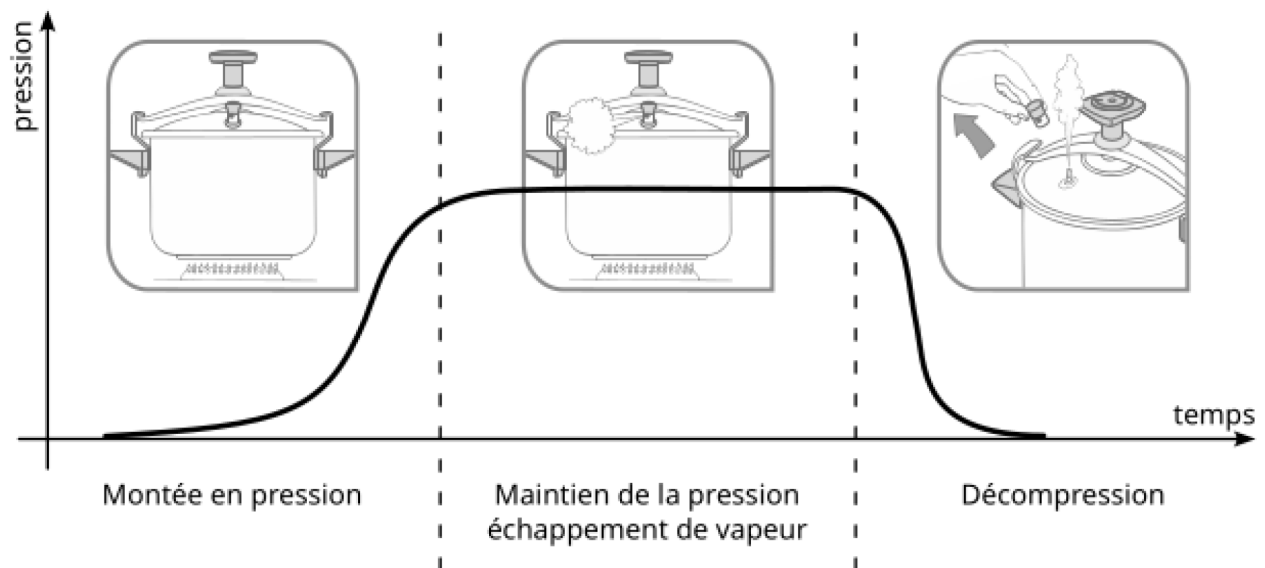


Figure 1 - Étapes de cuisson dans un autocuiseur

Partie I – La soupape

I.1 - Masse de la soupape

La soupape d'échappement de la vapeur est un cylindre de masse m placé sur le couvercle de l'autocuiseur. Elle peut coulisser verticalement sans frottement sur un cylindre creux qui fait communiquer l'intérieur de l'autocuiseur avec l'extérieur (figure 2).

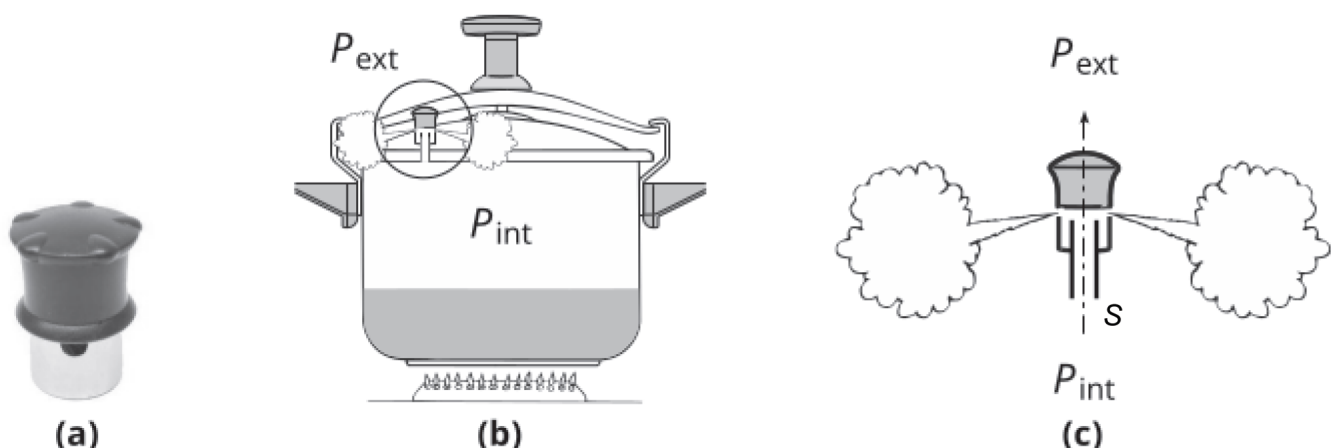


Figure 2 - Schéma de fonctionnement de la soupape d'échappement

Lorsque la pression augmente dans l'autocuiseur, la soupape monte, ce qui permet à la vapeur de s'échapper. En régime permanent, la soupape reste à hauteur constante (figure 2c) et est en équilibre sous l'effet de son poids et des forces de pression.

La pression extérieure vaut $P_{ext} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

On note P_{int} la pression à l'intérieur de l'autocuiseur.

La soupape est pesée sur une balance de cuisine (**figure 3a**) dont un extrait de la notice est donné (**figure 3b**).



(a)

Caractéristiques particulières

- Gamme de pesée : 10 g à 5 kg, avec une précision de mesure de l'ordre de 1 gramme.

(b)

Figure 3 - Balance de pesée

- Q1.** En tenant compte de l'indication de précision mentionnée par la notice de la balance, écrire la valeur numérique de la masse m de la soupape. L'évaluation de son incertitude-type associée serait-elle de type A ou de type B ?
Aucun calcul d'incertitude n'est demandé par la suite.

I.2 - Équilibre de pression

La section du conduit cylindrique d'évacuation de la vapeur vaut $S = 7,00 \text{ mm}^2$.

Des indications de pression et le volume de l'autocuiseur sont gravés sur celui-ci (**figure 4**).



Figure 4 - Indications sur l'autocuiseur

On note $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ la valeur du champ de pesanteur.

- Q2.** Représenter, à l'équilibre, la soupape et les trois forces qui s'exercent sur elle.
- Q3.** Déterminer l'expression littérale de P_{int} en fonction de P_{ext} , m , g et de S .
Déterminer la valeur numérique de P_{int} .
- Q4.** L'une des indications gravées sur l'autocuiseur permet-elle de confirmer ce résultat ?
À quoi correspond vraisemblablement l'autre indication de pression ?

Partie II - Mesures dans l'autocuiseur et exploitation

On verse un volume $V_e = 1,00 \text{ L}$ d'eau dans l'autocuiseur que l'on ferme et que l'on place sur une plaque chauffante délivrant la puissance thermique $P_{th} = 1,50 \text{ kW}$.

Des capteurs placés dans l'autocuiseur permettent d'enregistrer la température de l'eau, la température de la phase vapeur ainsi que la pression de la phase vapeur au cours du temps (**figure 5**).

On note :

- m_e la masse de l'eau,
- $c_e = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau,
- $C_a = 1,23 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique de l'autocuiseur.

L'eau et l'autocuiseur sont constamment à la même température et on note T_i leur température initiale.

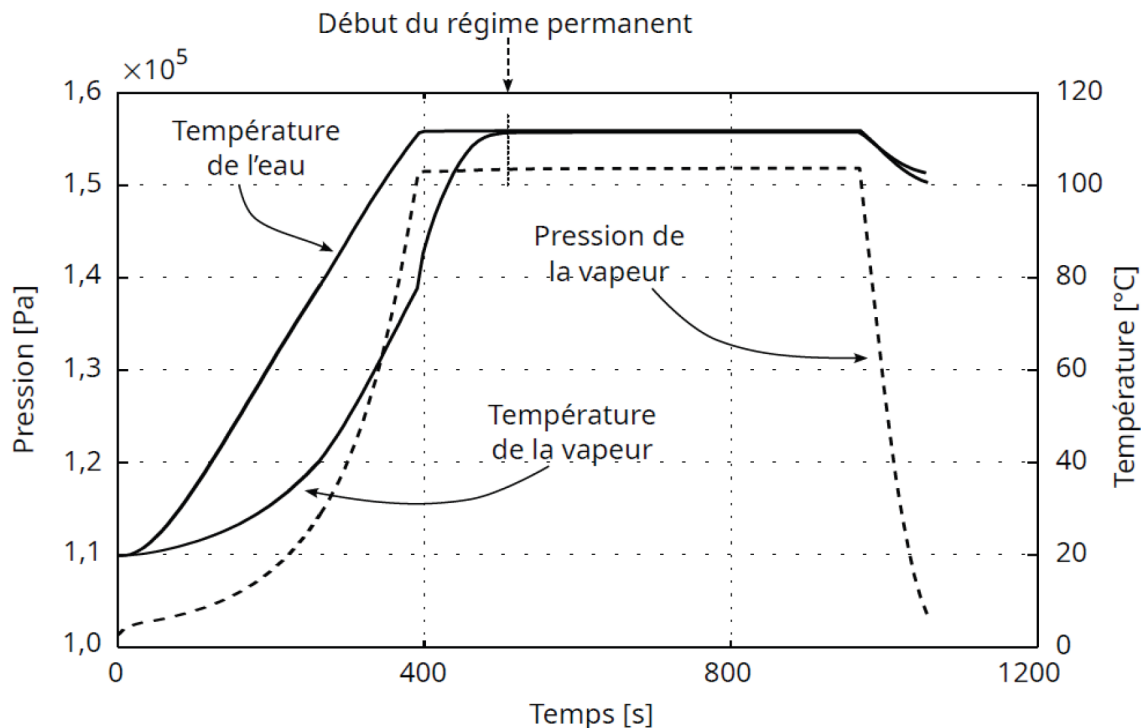


Figure 5 - Mesure de températures et de pression dans l'autocuiseur

II.1 - Premier modèle

Dans un premier temps, on suppose que toute la puissance thermique P_{th} est transférée à l'autocuiseur et à l'eau.

Q5. Relever sur la **figure 5** la température initiale T_i .

Q6. On note Δt la durée au bout de laquelle l'eau et l'autocuiseur atteignent la température $T_f = 100^\circ\text{C}$. Déterminer l'expression littérale de la durée Δt en fonction de m_e , c_e , C_a , T_f , T_i et de P_{th} .

Déterminer la valeur numérique de Δt .

Q7. Cette durée est-elle compatible avec les données de la **figure 5** ? Si non, donner deux arguments permettant de justifier cet écart.

II.2 - Second modèle

Dans un second temps, on tient compte des pertes thermiques de l'autocuiseur vers son environnement

au cours du temps sous la forme d'une puissance thermique de fuite $P_f(t) = k[T(t) - T_{\text{ext}}]$ où k et T_{ext} sont des constantes.

Q8. En effectuant un bilan thermique sur le système {eau + autocuiseur} pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt , montrer que la température du système satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}[T(t) - T_{\text{ext}}] = \frac{1}{\tau} \frac{P_{th}}{k} \quad (1)$$

et déterminer l'expression de τ en fonction de m_e , c_e , C_a et de k .

Q9. On cherche une solution de l'équation (1) sous la forme $T(t) = A + B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Déterminer les expressions littérales de A et de B en fonction des paramètres de l'équation (1).

Le tracé de la solution de l'équation (1) est présenté sur la **figure 6**.

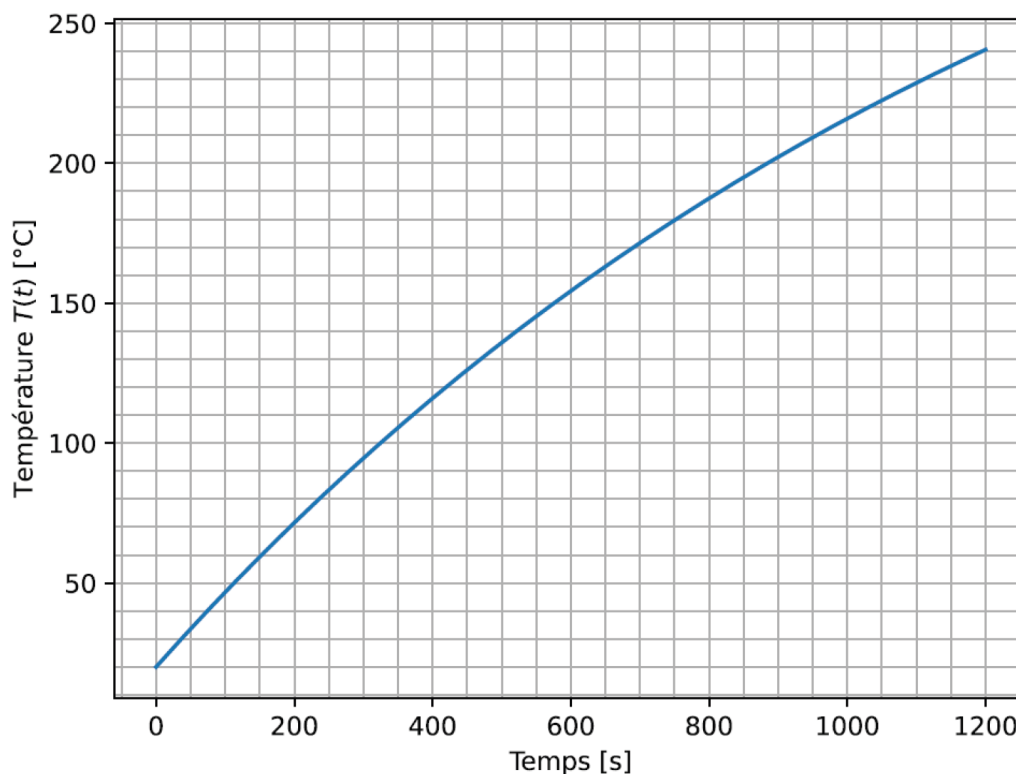


Figure 6 - Évolution de la température intérieure en fonction du temps

Q10. Dédurre de la **figure 6** la durée $\Delta t'$ nécessaire pour atteindre la température $T_f = 100^\circ\text{C}$.

Le résultat est-il cohérent avec la durée Δt trouvée précédemment ? Justifier.

Le résultat est-il satisfaisant ? Justifier.

II.3 - Augmentation de la vitesse de cuisson

On observe sur la **figure 5** qu'au-delà de 500 s, le régime permanent de cuisson est atteint. On note T_p la température de cuisson et P_p la pression de cuisson en régime permanent.

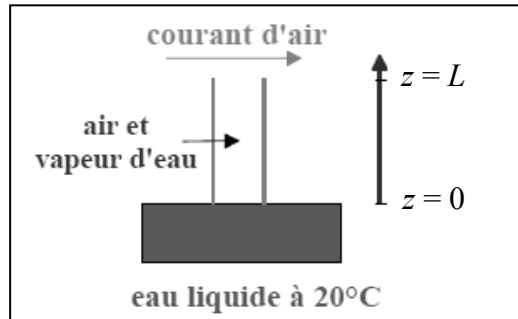
Q11. Relever sur la **figure 5** la température de cuisson T_p et la pression de cuisson P_p en régime permanent.

Q12. Préciser la raison thermodynamique pour laquelle la température et la pression sont devenues constantes.

Problème 3

Diffusion de molécules d'eau dans un tube

On plonge un tube vertical, ouvert à ses deux extrémités, dans une cuve d'eau à 20 °C. La section du tube est $S = 22 \text{ cm}^2$, et la longueur du tube au-dessus de l'eau est $L = 1,0 \text{ m}$. L'origine des altitudes $z = 0$ est prise à la surface de l'eau, l'extrémité supérieure du tube est donc à $z = L$. Des molécules d'eau s'évaporent en permanence à partir de la phase liquide, et diffusent dans l'air le long du tube pour finalement sortir en haut.



La concentration particulaire des molécules d'eau dans le tube ne dépend que de l'altitude z et du temps t , elle est notée $n^*(z, t)$. Un courant d'air en haut du tube permet de maintenir la condition aux limites $n^*(L, t) = 0$. On note $\vec{j}_N(z, t) = j_{N,z}(z, t) \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de molécules d'eau. Aucun processus d'absorption ni de création de molécules ne se produit à l'intérieur du tube.

Q13. Énoncer la loi de Fick reliant les fonctions ci-dessus. On notera D le coefficient de diffusion des molécules d'eau dans l'air ($D = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

Q14. À l'aide d'un bilan soigneusement expliqué, établir l'équation aux dérivées partielles reliant $n^*(z, t)$ et $j_{N,z}(z, t)$.

Q15. En déduire l'équation de diffusion :
$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2}.$$

Après une phase transitoire, on atteint un régime stationnaire. La concentration en bas du tube est alors notée $n^*(0) = n_0^*$.

Q16. Déterminer la fonction $n^*(z)$ en régime stationnaire.

Le processus de diffusion est assez lent pour qu'à la base du tube, la vapeur soit saturante : la pression partielle de vapeur d'eau est donc $P(0) = P_{\text{sat}} = 133 \text{ Pa}$, et cette vapeur peut être modélisée comme un gaz parfait.

Q17. Calculer la masse d'eau qui s'évapore par unité de temps à travers le tube.

Données

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse molaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$