

Th3 – Corrigé des exercices 1, 3 et 4

Exercice 1

a) Premier principe pour une tranche du fusible entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$:

$$dU(t + dt) - dU(t) = \delta Q_{\text{reçue}} + \delta Q_{\text{reçue}} + \delta W_{\text{électrique}}$$

en x en $x + dx$

soit $\rho S dx c [T(x, t + dt) - T(x, t)] = j_{Q,x}(x, t) S dt - j_{Q,x}(x + dx, t) S dt + dR I^2 dt$ avec $dR = \frac{dx}{\sigma S}$ (analogue de $R_{\text{th}} = \frac{\ell}{\gamma S}$).

On divise tout par $S dx dt$: $\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{Q,x}(x, t)}{\partial x} + \frac{I^2}{\sigma S^2}$. Avec la loi de Fourier $j_{Q,x}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$ on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

b) En régime stationnaire, l'équation devient : $\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$. On intègre deux fois : $\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{I^2}{\lambda \sigma S^2} x + A$ puis

$$T(x) = -\frac{I^2}{2\lambda \sigma S^2} x^2 + Ax + B. \text{ Conditions aux limites : } T(0) = B = T_0 \text{ et } T(L) = -\frac{I^2}{2\lambda \sigma S^2} L^2 + AL + T_0 = T_0 \text{ d'où } A = \frac{I^2}{2\lambda \sigma S^2} L.$$

Finalement : $T(x) = -\frac{I^2}{2\lambda \sigma S^2} (x^2 - Lx) + T_0$. C'est un arc de parabole, courbé vers le bas, symétrique par rapport à $x = \frac{L}{2}$.

c) La fusion a lieu en $x = \frac{L}{2}$, où la température est maximale : $T_{\text{max}} = T\left(\frac{L}{2}\right) = T_0 + \frac{I^2 L^2}{8\lambda \sigma S^2}$. On doit choisir la section S de sorte que

$$T_{\text{max}} = T_f \text{ (limite de la fusion du métal) pour } I = I_{\text{max}}, \text{ d'où } S = \frac{I_{\text{max}} L}{\sqrt{8\lambda \sigma (T_f - T_0)}}. \text{ AN } S = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 1,6 \text{ mm}^2 \text{ (diamètre 1,4 mm).}$$

$$d) \mathcal{P}_{\text{th}}(0) = j_{Q,x}(0)S = -\lambda S \frac{dT}{dx}(0) \text{ soit } \mathcal{P}_{\text{th}}(0) = -\frac{I^2 L}{2\sigma S} \text{ et de même } \mathcal{P}_{\text{th}}(L) = +\frac{I^2 L}{2\sigma S}.$$

Ces puissances sont celles transférées dans le sens de l'axe (Ox). $\mathcal{P}_{\text{th}}(0)$ est donc une puissance entrant dans le fusible, et puisqu'elle est négative c'est que le fusible fournit effectivement de la chaleur à l'extérieur en $x = 0$ (l'extérieur étant ici le fil de connexion situé à gauche). $\mathcal{P}_{\text{th}}(L)$ est en revanche une puissance sortant du fusible, mais puisqu'elle est positive c'est que le fusible fournit également de la chaleur à l'extérieur en $x = L$ (au fil de connexion situé à droite).

e) La puissance électrique reçue par le fusible est : $\mathcal{P}_{\text{élec}} = RI^2 = \frac{I^2 L}{\sigma S}$. On a donc trouvé $\mathcal{P}_{\text{élec}} + \mathcal{P}_{\text{th}}(0) - \mathcal{P}_{\text{th}}(L) = 0$. Ceci s'interprète comme un bilan d'énergie (premier principe) pour le fusible dans son ensemble : en régime stationnaire, la somme des puissances qu'il reçoit algébriquement est nulle.

Exercice 3

a) Par définition : $R_{\text{th}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}} = \frac{\theta_{\text{int}} - \theta_{\text{ext}}}{\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}}$ en notant $\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$ le flux thermique (puissance thermique) traversant la vitre de

l'intérieur vers l'extérieur. La résistance se calcule avec la formule $R_{\text{th}} = \frac{e}{a^2 \lambda}$. AN $R_{\text{th}} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

$$\text{On en déduit } \Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} = \frac{\theta_{\text{int}} - \theta_{\text{ext}}}{R_{\text{th}}}. \text{ AN } \Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} = 2,0 \text{ kW}.$$

b) Les deux vitres collées auraient une épaisseur $2e$, d'où une résistance $2R_{\text{th}}$ et un flux $\frac{\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}}{2} = 1,0 \text{ kW}$.

c) Les deux vitres et la couche d'air constituent trois résistances en série : $R_{\text{th,tot}} = \frac{2e}{a^2 \lambda} + \frac{e'}{a^2 \lambda'} = \frac{2e\lambda' + e'\lambda}{a^2 \lambda \lambda'} = 1,1 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Le nouveau

flux est donc $\Phi'_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} = \frac{\theta_{\text{int}} - \theta_{\text{ext}}}{R_{\text{th,tot}}} = \frac{(\theta_{\text{int}} - \theta_{\text{ext}}) a^2 \lambda \lambda'}{2e\lambda' + e'\lambda}$. AN $\Phi'_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} = 13 \text{ W}$. Le double vitrage a diminué les pertes thermiques d'un

facteur 150 (alors quelles ne sont diminuées que d'un facteur 2 en collant deux vitres)

d) Le flux est le même à travers chacun des trois conducteurs thermiques successifs (vitre, air, vitre). On peut appliquer la loi d'Ohm à chacun. Pour la vitre externe : $\theta_{\text{vitre ext/air}} - \theta_{\text{ext}} = R_{\text{th}} \times \Phi'_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$ d'où $\theta_{\text{vitre ext/air}} = \theta_{\text{ext}} + R_{\text{th}} \times \Phi'_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$. AN $\theta_{\text{vitre ext/air}} = 5,1 \text{ }^\circ\text{C}$.

De même $\theta_{\text{vitre int/air}} = \theta_{\text{int}} - R_{\text{th}} \times \Phi'_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$. AN $\theta_{\text{vitre int/air}} = 19,9 \text{ }^\circ\text{C}$. Chaque vitre a presque la même température sur ses deux faces, l'essentiel de la variation spatiale de température se fait dans la couche d'air (comprise entre $5,1 \text{ }^\circ\text{C}$ et $19,9 \text{ }^\circ\text{C}$).

e) Avec le modèle du corps noir : $\varphi = \sigma T_{\text{vitre}}^4 - \sigma T_{\text{ext}}^4$. Pour une petite différence, on peut poser $T_{\text{vitre}} = T_{\text{ext}} + dT$. Alors $T_{\text{vitre}}^4 - T_{\text{ext}}^4 = (T_{\text{ext}} + dT)^4 - T_{\text{ext}}^4 = d(T^4) = 4T^3 dT$ d'où $\varphi = 4\sigma T_{\text{ext}}^3 (T_{\text{vitre}} - T_{\text{ext}})$.

f) On définit alors $R'_{\text{th}} = \frac{T_{\text{vitre}} - T_{\text{ext}}}{\Phi_{\text{vitre} \rightarrow \text{air}}} = \frac{\theta_{\text{vitre}} - \theta_{\text{ext}}}{\varphi a^2}$ soit $R'_{\text{th}} = \frac{1}{4\sigma a^2 T_{\text{ext}}^3}$. Cette résistance est en parallèle avec les autres : elle n'est pas

traversée par le courant thermique ayant déjà traversé les vitres par conduction, mais par un autre « courant » entre T_{vitre} et T_{ext} .

g) AN $R'_{\text{th}} = 0,57 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. C'est une valeur comparable à $R_{\text{th,tot}}$, il faut donc bien tenir compte du rayonnement.

□ Exercice 4

a) Équation de diffusion unidimensionnelle, sans terme de « source » : $\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$.

b) On injecte la solution proposée $T(x,t) = T_0 + \underline{b}(x) \exp(j\omega t)$ dans l'équation aux dérivées partielles :

$\rho c j \omega \underline{b}(x) \exp(j\omega t) = \lambda \frac{d^2 \underline{b}(x)}{dx^2} \exp(j\omega t)$ soit après simplification $\frac{d^2 \underline{b}(x)}{dx^2} - j \frac{\rho c \omega}{\lambda} \underline{b}(x) = 0$. Équation caractéristique : $r^2 - j \frac{\rho c \omega}{\lambda} = 0$

soit $r^2 = 2j \frac{\rho c \omega}{2\lambda} = \frac{(1+j)^2}{\delta^2}$ donc $r = \pm \frac{1+j}{\delta}$. La solution générale est donc de la forme :

$$\underline{b}(x) = a \exp\left(-\frac{(1+j)x}{\delta}\right) + c \exp\left(+\frac{(1+j)x}{\delta}\right) = a \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right) + c \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(+j\frac{x}{\delta}\right).$$

Or le milieu est semi-infini vers les x croissants, le second terme divergerait, ce qui est impossible, donc $c = 0$. Il reste finalement :

$$\underline{b}(x) = a \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right).$$

c) Donc $T(x,t) = T_0 + a \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right) \exp(j\omega t) = T_0 + a \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$. On en prend la partie réelle pour obtenir

$$T(x,t) = T_0 + a \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

d) On nous donne $\theta_0 = 3^\circ\text{C}$, soit $T_0 = 276\text{ K}$, et $a = 15^\circ\text{C} = 15\text{ K}$. À une profondeur $x = 50\text{ cm}$, l'amplitude des variations, toujours autour de T_0 , est $a \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 0,49^\circ\text{C} = 0,49\text{ K}$, donc la température varie entre $2,5^\circ\text{C}$ et $3,5^\circ\text{C}$: il ne gèle pas.
