

Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 2**□ Premier problème** (Centrale-Supélec 2015 MP)

IV.A.1) Les températures sur les deux faces (conditions aux limites) sont uniformes (indépendantes de y et de z), et les dimensions selon ces deux directions sont très grandes devant l'épaisseur selon x , ainsi on peut négliger les « effets de bords » et considérer la température dans l'objet comme également indépendante de y et de z , donc fonction de x et de t seulement.

IV.A.2) Appliquons le premier principe à une tranche de solide comprise entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$:

$$dU(t + dt) - dU(t) = \delta W + \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} \Leftrightarrow dC[T(x, t + dt) - T(x, t)] = 0 + \iint_{S(x)} \vec{j}_Q(x, t) \cdot \vec{e}_x ds dt - \iint_{S(x+dx)} \vec{j}_Q(x + dx, t) \cdot \vec{e}_x ds dt$$

$$\Leftrightarrow \mu ab dx c [T(x, t + dt) - T(x, t)] = + j_Q(x, t) ab dt - j_Q(x + dx, t) ab dt \quad \text{d'où en divisant par } ab dx dt : \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q}{\partial x}.$$

Avec la loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$, soit ici $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on obtient : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

IV.A.3) En régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc il reste $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$. Solution : $T(x) = Ax + B$. Conditions aux limites : $T(0) = T_1 = B$ et

$T(\ell) = T_0 = A \cdot \ell + T_1$ donc $T(x) = \frac{T_0 - T_1}{\ell} x + T_1$. Puissance : $\Phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_x ds = j_Q ab = -\lambda \frac{dT}{dx} ab$ soit $\Phi = -\lambda \frac{T_0 - T_1}{\ell} ab$ ($\forall x$).

IV.A.4) Par analogie avec la loi d'Ohm $I_{1 \rightarrow 0} = \frac{V_1 - V_0}{R}$ ($I_{1 \rightarrow 0}$ étant un flux de charge), on peut écrire $\Phi = \frac{T_1 - T_0}{R_{\text{th}}}$ avec $R_{\text{th}} = \frac{\ell}{\lambda ab}$.

IV.B.1) $h = \frac{\delta Q_{\text{cc}}}{(T_0 - T_a) dx dy dt} = \frac{d\Phi_{\text{cc}}}{(T_0 - T_a) dx dy}$ donc son unité SI est le $\boxed{\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}}$. Sur une surface S : $\Phi_{\text{cc}} = h(T_0 - T_a) S$. La

résistance thermique est définie par $R_h = \frac{T_0 - T_a}{\Phi_{\text{cc}}}$, soit $R_h = \frac{1}{hS}$ ($= \frac{1}{hab}$ ici).

IV.B.2) AN pour le cuivre : $R_{\text{th,Cu}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$; pour le silicium : $R_{\text{th,Si}} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$; pour le flux conducto-convectif dans l'air immobile : $R_h = 35 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$; pour l'air brassé : $R_h = 3,5 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Ces deux résistances étant en série (traversées l'une après l'autre par le même flux), elles s'ajoutent, ce qui donne toujours R_h , car R_{th} est négligeable, même dans l'air brassé : la chaleur diffuse beaucoup plus vite à l'intérieur du matériau (ce qui permet d'homogénéiser sa température) qu'à l'interface avec l'air, donc c'est le contact avec l'air qui limite l'évacuation de la chaleur, un changement de matériau de la plaque n'y ferait rien.

IV.C) Le microprocesseur, principalement en silicium, a les mêmes dimensions que ci-dessus, et il reçoit une puissance électrique $\mathcal{P} = 15 \text{ W}$ d'après la documentation. On va considérer qu'il est entouré d'air des deux côtés, et que sa température T est uniforme (approximation précédente), et on lui applique alors le premier principe entre t et $t + dt$: $U(t + dt) - U(t) = -\delta Q_{\text{cc}} + \mathcal{P} dt$

soit $\mu ablc [T(t + dt) - T(t)] = -h(T - T_a) 2ab dt + \mathcal{P} dt$ d'où en divisant par $\rho ablc dt$: $\frac{dT}{dt} = -\frac{2h}{\mu lc} (T - T_a) + \frac{\mathcal{P}}{\mu ablc}$. Cette équation

différentielle d'ordre 1 peut se mettre sous la forme canonique $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T = \frac{1}{\tau} \left(T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} \right)$ avec $\tau = \frac{\mu lc}{2h} = 41 \text{ s}$. Solution générale :

$$T(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab}. \quad \text{En partant de } T(0) = T_a = 20^\circ \text{C} \text{ on trouve finalement } T(t) = T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

La valeur limite est $T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} = 280^\circ \text{C}$. Cela ne peut pas faire fondre le silicium ni le cuivre. En revanche, la documentation indique une température $T_{\text{jonction}} = 100^\circ \text{C}$ qui semble être la température maximale (fusion des soudures ?). Celle-ci est atteinte lorsque

$$T_{\text{jonction}} = T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{d'où} \quad t = -\tau \ln \left(1 - 2hab \frac{T_{\text{jonction}} - T_a}{\mathcal{P}} \right) = -\frac{\mu lc}{2h} \ln \left(1 - 2hab \frac{T_{\text{jonction}} - T_a}{\mathcal{P}} \right). \quad \text{AN } \boxed{t = 15 \text{ s}}.$$

Ce temps est beaucoup trop court pour une utilisation dans ces conditions : les systèmes de ventilation et de refroidissement sont indispensables.

IV.D.1) Dans le premier principe sur une tranche, on a maintenant trois transferts thermiques. En régime stationnaire : $dU(t + dt) - dU(t) = 0 = +\delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} - \delta Q_{\text{cc}}$

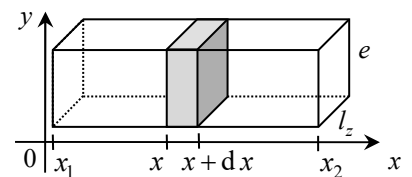
$$\Leftrightarrow +j_Q(x) el_z dt - j_Q(x + dx) el_z dt - h \cdot (T - T_a) dx (2e + 2l_z) dt = 0.$$

On divise par $el_z dx dt$: $-\frac{dj_Q}{dx} - 2h \cdot (T - T_a) \frac{e + l_z}{el_z} = 0$. En injectant $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ on

obtient l'équation différentielle $\frac{d^2 T}{dx^2} - (T - T_a) \frac{2h(e + l_z)}{\lambda el_z} = 0$, soit $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T - T_a) = 0$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda el_z}{2h(e + l_z)}}$.

Solution : $T(x) - T_a = B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + C \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)$. Conditions aux limites : $T(H \rightarrow +\infty) = T_a = T_a + C$ donc $C = 0$; et

$$T(x_1) = T_R = T_a + B \exp\left(-\frac{x_1}{\delta}\right) \quad \text{donc} \quad B = (T_R - T_a) \exp\left(+\frac{x_1}{\delta}\right). \quad \text{Finalement : } T(x) = T_a + (T_R - T_a) \exp\left(-\frac{x - x_1}{\delta}\right).$$



IV.D.2) Puissance totale évacuée par le radiateur (donc à l'abscisse x_1) : $\Phi_R = 6j_Q(x_1) \times e \times l_z = -6\lambda \frac{dT}{dx}(x_1) e l_z = 6\lambda e l_z \frac{T_R - T_a}{\delta}$ soit

$$\Phi_R = 6(T_R - T_a) \sqrt{2\lambda h e l_z (e + l_z)} . \text{ On peut l'écrire } \Phi_R = \frac{T_R - T_a}{R_{th,R}} \text{ avec } R_{th,R} = \frac{1}{6\sqrt{2\lambda h e l_z (e + l_z)}} . \text{ AN } \Phi_R = 36 \text{ W} \text{ et}$$

$R_{th,R} = 1,4 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Cette résistance thermique est beaucoup plus faible que celle du contact direct processeur/air ($R_h = 35 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$), donc la puissance thermique évacuée est beaucoup plus grande qu'en l'absence de radiateur.

IV.E.1) Le mot *caloduc* est analogue à *aqueduc*, et aux plus récents *oléoduc* et *gazoduc*, où le radical *-duc* signifie un canal de transport de quelque chose (de l'eau, du pétrole ou du gaz) : le caloduc est donc une canalisation de transport de la chaleur.

IV.E.2) Puisqu'il y a une force qui provoque un déplacement, cette force exerce donc un travail.

IV.E.3) Au point A l'eau est liquide à 71 °C, et elle se vaporise totalement jusqu'en B : la transformation AB est celle qui a lieu sous le microprocesseur M. Puis BC est la détente adiabatique qui a lieu lorsque la vapeur d'eau se déplace de M à R, où elle arrive à 70 °C. CD est la liquéfaction de la vapeur sous le radiateur R. DA est le réchauffement adiabatique qui a lieu lorsque l'eau liquide se déplace dans les rainures de R à M. Ceci constitue donc un petit moteur ditherme : le microprocesseur est la source chaude, dont la chaleur évacuée est convertie partiellement en travail pour déplacer l'eau dans le caloduc, le reste étant fourni au radiateur, source froide. (Les données fournies sur l'eau permettent de calculer le rendement de ce moteur, mais apparemment la question a été supprimée !)

IV.F) Par définition : $R_{th,calo} = \frac{T_R - T_M}{\mathcal{P}_{micro}}$. AN $R_{th,calo} = 0,05 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Si on remplaçait le caloduc par un barreau de cuivre, on aurait

$$R_{th,Cu} = \frac{y_2 - y_1}{\lambda_{Cu} l_x l_z} = 4,3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} : \text{cette résistance beaucoup plus grande ne permettrait pas d'évacuer toute la chaleur produite.}$$

II Deuxième problème (Mines-Ponts 2017 PSI)

1. Dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen, la comète est soumise uniquement à la force de gravitation $\vec{F}$ due au Soleil.

PFD : $m \vec{a}(M) = \vec{F} = -G \frac{M_\odot m}{R^2} \vec{e}_r$. Projection sur $\vec{e}_r$: $-mR\dot{\theta}^2 = -G \frac{M_\odot m}{R^2}$ d'où $\dot{\theta}^2 = G \frac{M_\odot}{R^3} = \text{cte}$. Période : $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_\odot}}$

d'où $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$. Pour une ellipse : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$. Pour faire le calcul simplement pour Chury, on peut utiliser le fait que ce rapport

est le même que pour la Terre : $T_c = T_{Terre} \sqrt{\frac{a_c^3}{a_{Terre}^3}}$. En unités astronomiques, $a_c = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = 3,5 \text{ ua}$, $a_{Terre} = 1 \text{ ua}$ (par définition), et $T_{Terre} = 1 \text{ a}$ (année) d'où $T_c = 6 \text{ a} = 2 \cdot 10^8 \text{ s}$.

2. TMC appliqué à la comète en S (centre du Soleil) : $\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = \mathcal{M}_S(\vec{F}) = r\vec{e}_r \wedge \vec{F} = \vec{0}$ donc $\vec{L} = \text{cte}$. Par définition : $\vec{\sigma}_S = \vec{SM} \wedge m\vec{v}$

donc $\vec{SM}$ est à tout instant orthogonal à $\vec{\sigma}_S$: le mouvement de S a donc lieu dans le plan passant par S et orthogonal à $\vec{\sigma}_S$.

Alors $\vec{\sigma}_S = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$ soit $\vec{\sigma}_S = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ d'où $C = r^2\dot{\theta}$ (en supposant $\dot{\theta} > 0$).

3. Énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GM_\odot m}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{GM_\odot m}{r}$

donc $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r)$ avec $E_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GM_\odot m}{r}$. Or $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ et $E_m = \text{cte}$ (pas de force non conservative) donc $E_{eff}(r) \leq E_m$: ainsi E_m constitue un plafond pour la partie accessible de $E_{eff}(r)$. r_{min} et r_{max} sont les deux valeurs extrêmes de ce domaine accessible.

4. Si E_m est égale au minimum de la courbe, il y a alors une seule valeur accessible de r ,

c'est-à-dire que le mouvement est circulaire. Le minimum de la courbe est donné par $\frac{dE_{eff}}{dr}(r_0) = 0 = -\frac{mC^2}{r_0^3} + \frac{GM_\odot m}{r_0^2}$ d'où

$$r_0 = \frac{C^2}{GM_\odot} \text{ et } E_0 = E_{eff}(r_0) = -\frac{mG^2M_\odot^2}{2C^2}. E_p(r_0) = -\frac{GM_\odot m}{r_0} \text{ et } E_c(r_0) = \frac{mC^2}{2r_0^2} = \frac{GM_\odot m}{2r_0} \text{ (car } \dot{r} = 0 \text{) donc } E_p(r_0) = -2E_c(r_0).$$

5. r_{min} et r_{max} vérifient $E_{eff}(r) = E_m$ soit $\frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GM_\odot m}{r} = E_m$ d'où l'équation $E_m r^2 + GM_\odot m r - \frac{mC^2}{2} = 0$. Discriminant :

$\Delta = (GM_\odot m)^2 + 2E_m mC^2$ donc $\Delta \geq 0$ équivaut à $E_m \geq -\frac{(GM_\odot m)^2}{2mC^2} = E_0$: cette condition est bien vérifiée. Alors les racines sont

$$r_{min} = -\frac{GM_\odot m}{2E_m} - \frac{\sqrt{(GM_\odot m)^2 + 2E_m mC^2}}{2E_m} \text{ et } r_{max} = -\frac{GM_\odot m}{2E_m} + \frac{\sqrt{(GM_\odot m)^2 + 2E_m mC^2}}{2E_m}. \text{ Or } r_{min} + r_{max} = 2a, \text{ donc } 2a = -\frac{GM_\odot m}{E_m}$$

d'où l'énergie $E_m = -\frac{GM_\odot m}{2a}$. De plus $r_{max} = a(1+e)$ et $r_{min} = a(1-e)$ donc $r_{max}r_{min} = a^2(1-e^2) = -\frac{mC^2}{2E_m}$ soit $1-e^2 = -\frac{mC^2}{2E_m a^2}$.

6. La vitesse aréolaire est constante : $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2} = \text{cte}$ (voir schéma de cours), c'est la deuxième loi de Kepler. On intègre sur

une période T : $\frac{CT}{2} = S = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$. Avec les relations précédentes : $\frac{CT}{2} = \pi a^2 \sqrt{-\frac{mC^2}{2E_m a^2}} = \pi a^2 \sqrt{\frac{C^2}{GM_\odot a}}$ d'où $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$.

7. L'assistance gravitationnelle est l'apport d'énergie par la force de gravitation lors de la déviation au voisinage d'un astre.

